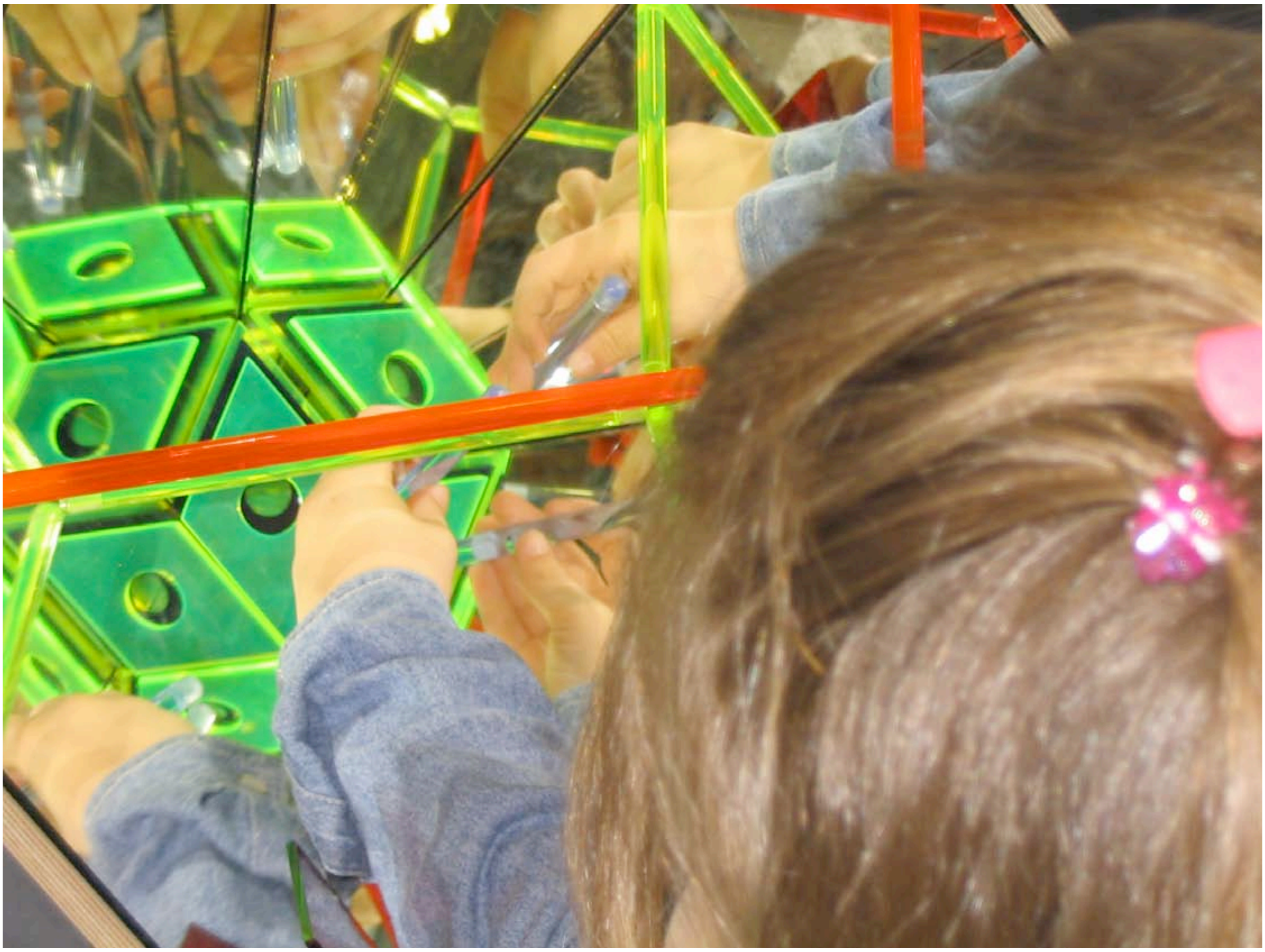


Vanessa Krummeck, Jürgen Richter-Gebert

Mathematik be-greifen

Mathematische Erfahrungen mit Alltagsmaterialien: Spiegel, Pfeifenreiniger und Papier

Kinder im Vor- und Grundschulalter haben meist noch ein ausgesprochen unbefangenes Verhältnis zur Mathematik. Zählen, Vergleichen, Ordnen sind Tätigkeiten, die mit viel kreativem Spaß und oftmals direkten Erfolgserlebnissen verbunden sind. Für Kinder hat Mathematik dabei oft eine fast magische Komponente: „Alles geht so schön auf“, „Die Dinge passen überraschend gut zueinander“. Mit einer solchen Herangehensweise sind Kinder in diesem Alter dem Bild, das ein „richtiger Profimathematiker“ von Mathematik hat, meist auf überraschende Weise näher als zu vielen späteren Zeitpunkten ihrer Schullaufbahn.

Kinder in der Mathematik-Ausstellung *ix-quadrat*

Im Verlauf der Schulausbildung wird das direkte, oft neugierige Herangehen an Mathematik ersetzt durch Auswendiglernen und Anwenden von Regeln, ohne diese verstanden und hinterfragt zu haben. Die Kategorien „richtig“ und „falsch“ werden wichtiger als Verstehen und Nachvollziehen. Dies ist auch verständlich, denn der Lehrplan drängt. All zu viele vertiefende und interessante Fragen kann sich der Lehrer nicht erlauben, sonst läuft ihm die Zeit davon.

Somit kommt gerade der Mathematikerziehung in der Vor- und Grundschule eine wichtige Schlüsselrolle zu: Es gilt, die Offenheit der Kinder, ihr Interesse und ihre damit verbundene natürliche Bereitschaft, Fragen zu stellen und diese eventuell sogar selbst zu beantworten, zu erhalten. Spielerische Angebote, mit denen Mathematik unter Einbeziehung visueller, motorischer und haptischer Komponenten erlebt und erfahren werden kann, sind dabei von unschätzbarer Wichtigkeit. Das Kind soll selbst aktiv werden und im Spiel mathematische Phänomene erfahren.

In diesem Artikel sollen Anregungen gegeben werden, wie man Mathematik mit alltäglichen Materialien mit Kindern spannend erfahren kann. Der Begriff der *Zahl* wird dabei bewusst ausgeklammert, um zu zeigen, dass mathematische Strukturen bereits auf einer viel elementareren Ebene auftreten.

Flechten, Weben, Spiegeln

Regelmäßigkeit, sich wiederholende Muster, Gleichartigkeit und Wiederholbarkeit spielen bei mathematischen Strukturen oft eine wichtige Rolle. Viele Erfahrungen, die beim Handarbeiten und Werken gesammelt werden, bieten dabei ein erste Grunderfahrung. Zum Beispiel sorgt das regelmäßige *Auf* und *Ab* eines dreisträngigen Zopfes dafür, dass dieser stabil bleibt und nicht auseinander fällt.

Mit etwas Geschick und der richtigen Anleitung können aus Pfeifenreinigern regelmäßige Sterne gewoben werden. Dabei können sogar räumliche Gebilde entstehen. Kinder können dabei unter anderem die Erfahrung machen, dass viele kleine Teile sich manchmal überraschend zu einem Großen-Ganzen zusammenfügen (Ein kleiner Tip: zum Basteln geeignete Pfeifenreiniger bekommt man am besten im Tabakladen)

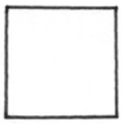
Eine andere mathematische Form der Wiederholung ist das *Spiegeln*. Ein einzelner Spiegel wiederholt, was davor ist. Zwei Spiegel wiederholen mehrfach. Wenn Spiegel Spiegel spiegeln, entstehen beeindruckende Muster. Der Winkel, in dem die beiden Spiegel zueinander stehen, entscheidet darüber, wie oft sich eine Originalfigur wiederholen wird. Ordnet man drei Spiegel in geeigneter Weise zueinander an, entstehen sogar räumliche oder unendlich große Figuren. Mit Spiegeln können Kinder elementar und anschaulich an das Thema Symmetrie herangeführt werden, der Einsatz mehrerer Spiegel bietet ein Spielfeld von nahezu grenzenloser Reichhaltigkeit.

Fortsetzung auf Seite 8

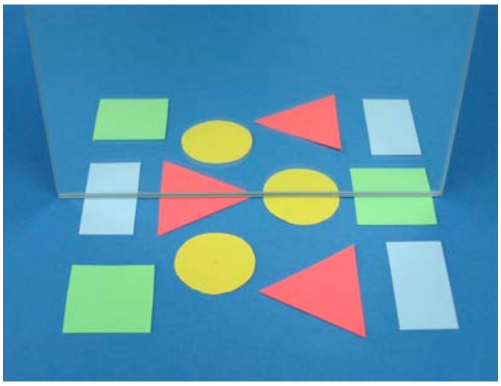
Spiegelkacheln

Mit Spiegelkacheln Mathematik entdecken! Einfache Spiegelkacheln, wie sie im Baumarkt erhältlich sind, lassen sich allein, zu zweit oder zu dritt für mathematische Entdeckungsreisen einsetzen.

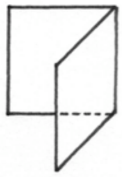
1 Spiegel



Welche Dinge lassen sich so spiegeln, dass sie zusammen mit ihrem Spiegelbild wieder genau so aussehen wie zuvor?



2 Spiegel



Mit zwei Spiegelkacheln kann man einen **Klappspiegel** bauen (siehe Kasten), mit dem sich viele Experimente durchführen lassen. Legt man Objekte zwischen die beiden Spiegel, so entstehen mehrere Spiegelbilder. Die Spiegelbilder werden wieder gespiegelt.

Je nach Klappwinkel entstehen Bilder mit Bruchkanten oder Bilder, die perfekt aussehen. Bei manchen Winkeln scheinen die Spiegelbilder besser zu "passen" als bei anderen.

Winkel, die zu perfekten Bildern führen sind 90°, 60°, 45°, 36°, 30°,... Der Grund ist: 180°/2=90°, 180°/3=60°, 180°/4=45°, und so weiter.

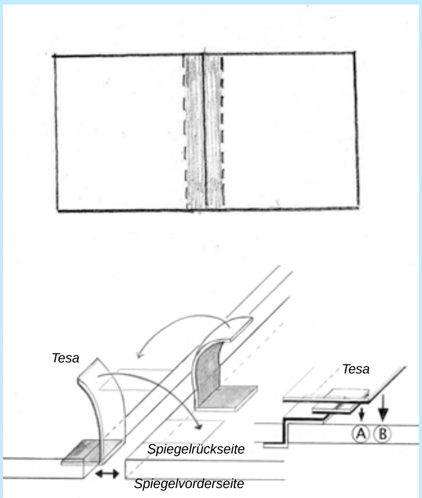
Wie baut man einen Klappspiegel?

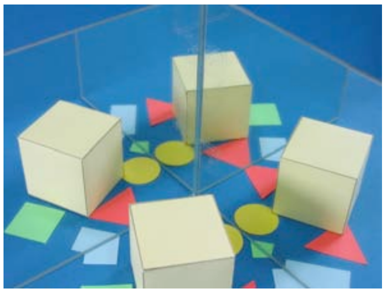
Einfache und schnelle Variante:

Man klebt zwei Spiegelkacheln auf der spiegelnden Seite längs einer Kante mit einem Tesastreifen zusammen.

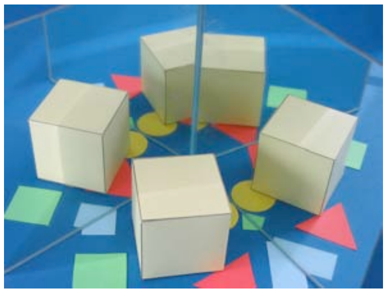
Elegante und gut bewegliche Variante:

Zuerst braucht man 5 querverlaufende Tesastreifen, und zwar 3 für die linke Kachel (unten, mitte, oben) und 2 für die rechte Kachel (Zwischenräume zwischen unten, mitte, oben). Tesastreifen jeweils auf der Spiegelseite aufkleben und am Kachelrand andrücken. Kacheln auf Spiegelseite legen, zusammmenschieben und die 5 Tesastreifen jeweils auf der anderen Kachel mit einem kleinen Extra-Tesastreifen fixieren (A). Damit alle Klebeflächen abgedeckt sind, dann komplett mit Tesafilm abkleben (B).

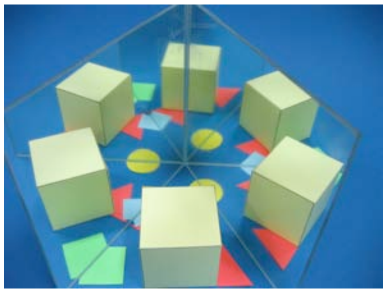




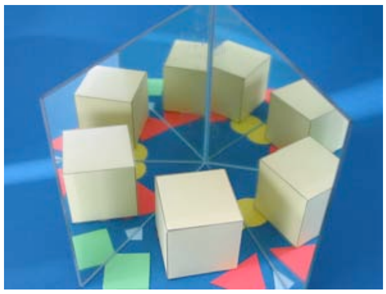
Klappspiegel mit 90°: Drei perfekte Spiegelbilder entstehen.



Klappspiegel mit 85°: Eine Bruchkante entsteht.

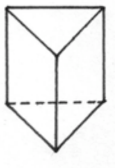


Klappspiegel mit 60°: Alles passt wieder und man sieht fünf Spiegelbilder.

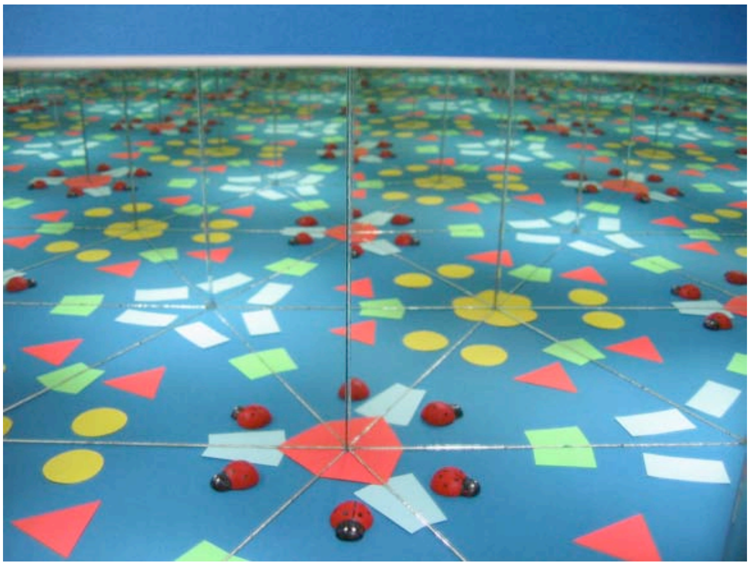


Klappspiegel mit 55°: Es entsteht wieder eine Bruchkante.

3 Spiegel

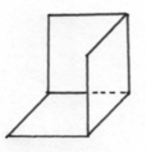


Klebt man drei Spiegelkacheln an den Kanten so zusammen, dass eine dreieckige Röhre entsteht, erhält man ein einfaches **Kaleidoskop**. Hiermit sind wahrhaft Blicke in die Unendlichkeit möglich. (Kaleidoskop kommt übrigens aus dem Griechischen und bedeutet "Schönschauer".)

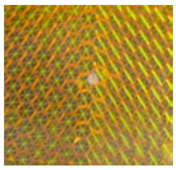


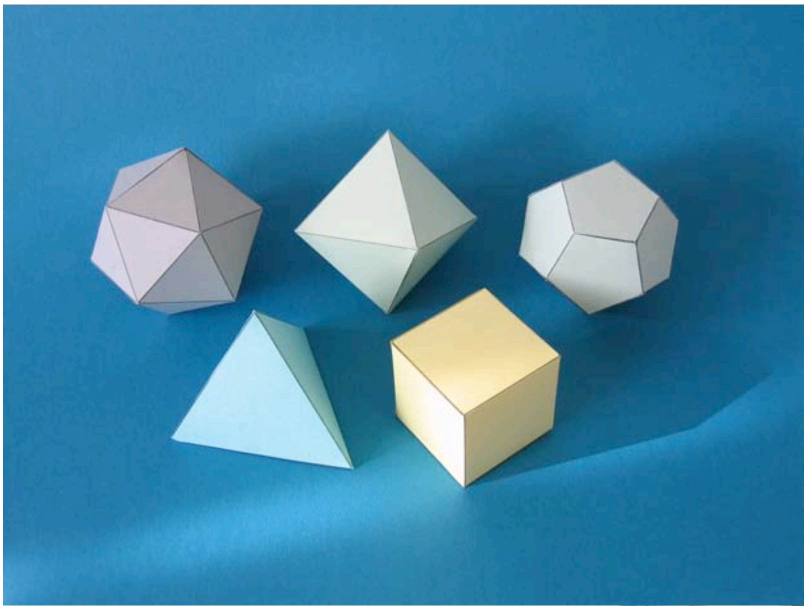
Blick über den Rand eines Dreieckskaleidoskops

Nochmal 3 Spiegel

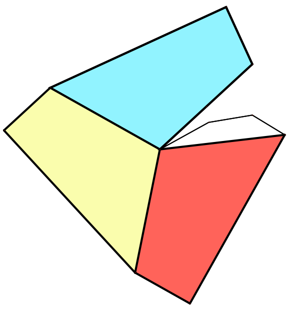


Der **Würfeleckspiegel** besteht aus drei Spiegeln, die jeweils senkrecht zueinander stehen. Ganz gleich von wo aus man hineinschaut, man sieht sich immer – und zwar auf dem Kopf. Das gleiche Prinzip nutzen Katzenaugen beim Fahrrad aus: Ganz gleich, von wo das Licht kommt, es wird genau zurück reflektiert.





Vier der fünf platonischen Körper können als Spiegelbild im Würfeleckspiegel entstehen.



Bastelbogen (bestehend aus drei halben Fünfecken) für ein Einlegeteil in den Würfeleckspiegel. Richtig eingelegt vervollständigt sich dieses Einlegeteil zu einem Dodekaeder.

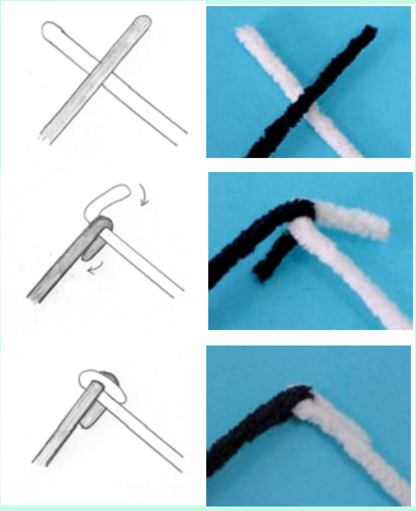
Aber auch einfache Dreiecke und Sechsecke sind interessante Einlegeteile.

Ein Dodekaeder entsteht im Würfeleckspiegel.

Sterne aus Pfeifenreinigern

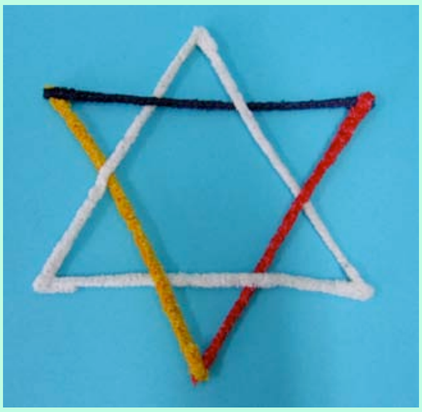
Grundtechnik 1

Damit zwei an den Enden verbundene Pfeifenreiniger auch wirklich halten, wie folgt vorgehen:



Grundtechnik 2

Werden beim Basteln mit Pfeifenreinigern mehrere Pfeifenreiniger miteinander verflochten, gilt immer das "*Drunter-Drüber-Drunter-Drüber*"-*Prinzip*.

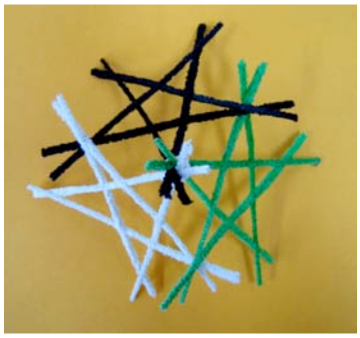


Ein guter Einstieg in das Basteln mit Pfeifenreinigern ist das gemeinsame Herstellen eines großen Sterns. Die Kinder sollten zuerst üben, wie man zwei Pfeifenreiniger stabil miteinander verbindet (Grundtechnik 1). Danach bastelt jedes Kind ein Dreieck und webt nach dem "Drunter-Drüber-Drunter-Drüber"-Prinzip (Grundtechnik 2) ein weiteres Dreieck ein. Der so entstandene sechszackige Stern ist bereits ein attraktiver Fensterschmuck.

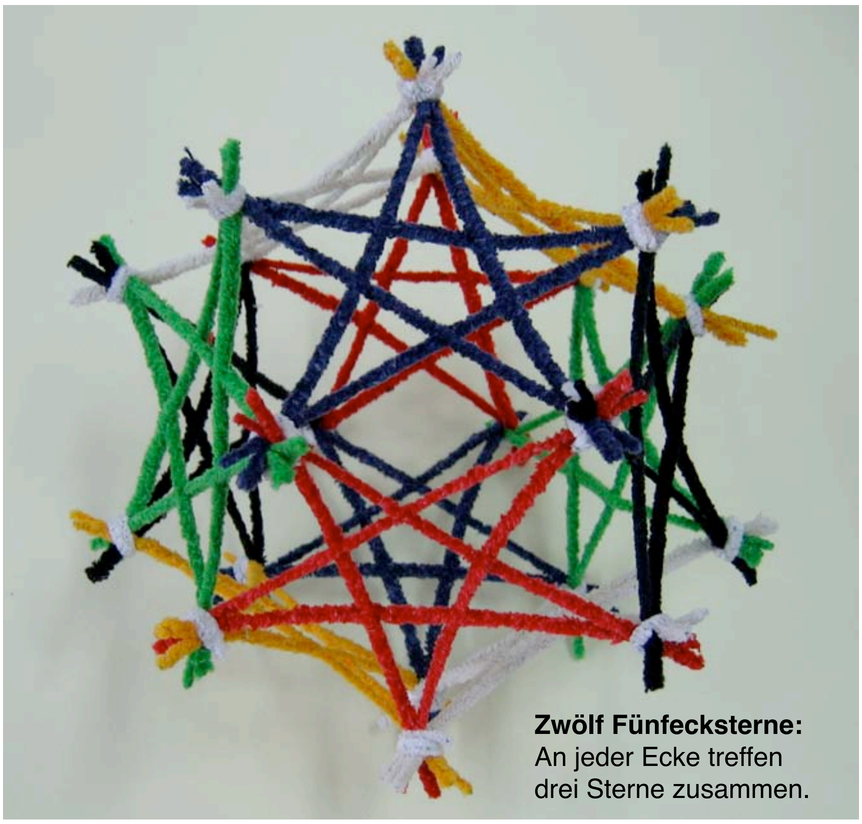
Ein sinnvoller nächster Schritt ist die Herstellung eines Fünfecksterns (Bild rechts oben). Hierbei ist die Grundtechnik 2 besonders wichtig: Richtig angewandt hält der Stern dann sogar ohne Verbinden der Enden.

Zwölf solcher Fünfecksterne lassen sich zu einem dreidimensionalen Stern verbinden – ein wunderschönes Gemeinschaftserlebnis.

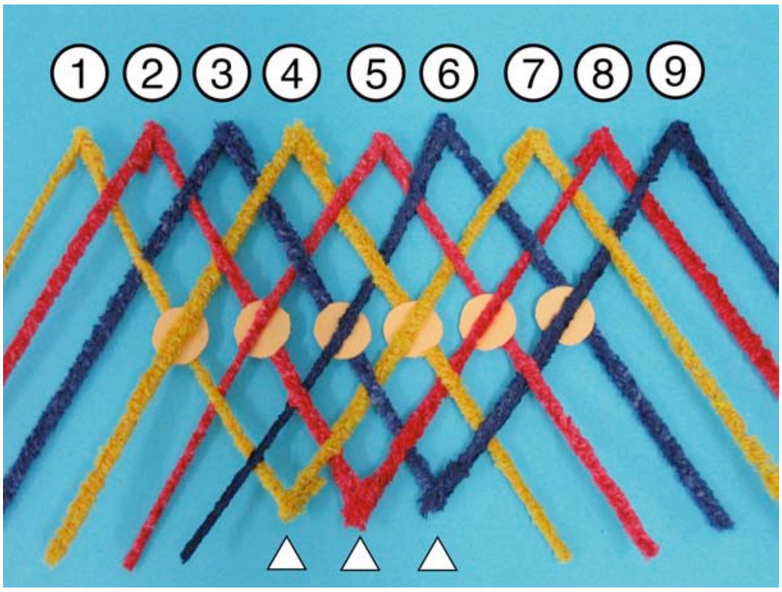
Ein Fünfeckstern



Drei Fünfecksterne



Zwölf Fünfecksterne:
An jeder Ecke treffen drei Sterne zusammen.



Sternkrone aus Pfeifenreinigern

Die Sternkrone ist eine kleine Herausforderung. Wir basteln dazu aus ***18 Pfeifenreinigern 9 Dreiecksspitzen.*** Wir beginnen mit der ersten Dreiecksspitze und legen diese vor uns hin. Leicht nach rechts versetzt legen wir nun die zweite Dreiecksspitze *auf* die erste.

Auf die gleiche Art und Weise legen wir nun die dritte Dreiecksspitze *auf* die zweite. Zusätzlich folgen wir der Grundtechnik 2 und flechten *die linke Seite der dritten Dreiecksspitze* ***unter*** *die rechte Seite der ersten*. Dem gleichen Prinzip folgend flechten wir die vierte bis siebte Dreiecksspitze ein.

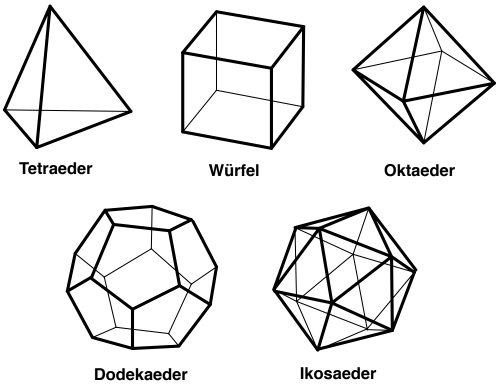
Bei der *siebten Dreiecksspitze* gibt es erstmals noch einen weiteren Schritt zu tun: Wir verbinden die *linke Seite der siebten Dreiecksspitze am* ***unteren Ende*** *mit der rechten Seite der ersten Dreiecksspitze*. Ähnlich verfahren wir mit der achten und neunten Dreiecksspitze. Jede Seite einer Dreiecksspitze, die nun *oben* ***und*** *unten* mit einer anderen Seite verbunden ist, kreuzt jeweils genau *fünf* andere Seiten.

Wir wollen nun die noch losen Enden so verflechten, dass auch sie zwischen Anfang und Ende *genau fünf* andere Seiten kreuzen. Dazu biegen wir unseren „Gartenzaun“ etwas zusammen. Nach der uns nun schon vertrauten Grundtechnik 2 flechten wir nun die *rechte Seite der neunten Dreiecksspitze* so ein, dass wir sie mit der *linken Seite der sechsten Dreiecksspitze* verbinden können. Mit den anderen Enden verfahren wir genauso.

Zum Schluss zupfen wir unsere Krone noch etwas in Form. Und wenn wir alles richtig gemacht haben, dann können wir unsere Krone auch in einen Stern verwandeln.

Platonische Körper

Innbegriff mathematischer Regularität sind die Platonischen Körper. Bei diesen Körpern sehen alle Flächen und alle Ecken genau gleich aus, und als Flächen sind nur reguläre Dreiecke, Quadrate und Fünfecke erlaubt. An jeder Ecke stoßen gleich viele Flächen zusammen. Es gibt genau fünf Körper, die diese Bedingungen erfüllen. Sie heißen Tetraeder, Oktaeder, Würfel, Ikosaeder und Dodekaeder. Diese Körper treten als elementare Grundstrukturen in vielen mathematischen



Zusammenhängen auf. Sie weisen zahlreiche Symmetrien auf, die einen Körper wieder in sich selbst überführen (z.B. Drehungen um Ecken, Spiegelungen, etc.). Man kann mit Kindern Platonische Körper aus Bastelbögen anfertigen und danach mit den Körpern auf mathematische Entdeckungsreise gehen – beispielsweise:

Kinder im *ix-quadrat* erkunden eine rechnende Murmelbahn aus Lego

- Symmetrien suchen
- Flächen zählen
- Ecken und Kanten zählen
- Wo steckt im Würfel ein Tetraeder?
- Wo ist im Dodekaeder ein Würfel?

Bastelbögen zum Anfertigen platonischer Körper können unter `www-m10.ma.tum.de/ix-quadrat` herunter geladen werden.

ix-quadrat

Am Zentrum für Mathematik der Technischen Universität München existiert seit Herbst 2002 die Mathematik-Ausstellung *ix-quadrat*. Idee der Ausstellung ist es, Mathematik im wörtlichen Sinne be-greifbar zu machen. Zu den Themen *Symmetrie, Rechen- und Zeichengeräte, M.C. Escher* werden dort mathematische Modelle, Mitmachexperimente und interaktive Computerinstallationen angeboten. Die Erfahrung zeigt, dass sich Kinder mit großem Interesse mit den Experimenten beschäftigen und sich ein geplanter 2-stündiger Besuch oftmals als zu kurz heraus stellt. Nicht selten werden überraschende (und auch für das Führungspersonal neue) Zusammenhänge von den Kindern selbst entdeckt.

Die Autoren

Vanessa Krummeck
Diplom-Mathematikerin,
Doktorandin an der TU München
Mitarbeiterin der ersten Stunde
im *ix-quadrat*

Jürgen Richter-Gebert
Mathematikprofessor, TU München,
Autor des Geometrieprogramms
Cinderella, Gründer von *ix-quadrat*