

Blicke in die Unendlichkeit

Jürgen Richter-Gebert, Technische Universität München

0. Kindheitserinnerungen

Der geliebte alte, etwas aus der Mode gekommene, Alibertschrank im Badezimmer. Als Kind an Klappspiegeltüren Blicke in die Unendlichkeit gewagt. Wie eng konnte man die beiden Spiegeltüren zusammenklappen, so dass man gerade noch mit seinem Auge hineinlinsen konnte, um eine schier endlose Kette von sich spiegelnden Spiegeln zu sehen - nach hinten langsam in einem glasgrünen Schleier verschwindend. Szenenwechsel, Großmutter's Vitrinenschrank. Ein Schaukasten für Häkeldeckchen und Nippes. Der „Hauptausstellungsraum“ dieses Schrankes bestand aus einem quaderförmigen Fach, das von fünf Seiten mit Spiegeln versehen war, so dass sich die Porzellanfiguren mehr als vorstellbar oft wiederholten. Das merkwürdigste an diesem Fach war aber das folgende: Wenn man sich vor die Spiegel stellte, ein Auge zukniff und in die hintere Ecke des Faches schaute, in der sich drei Spiegel - senkrecht aufeinander stehend - trafen, sah man immer das andere Auge im Fadenkreuz der drei sich treffenden Spiegel. Ich vermute ich stand insgesamt Stunden davor und grübelte nach dem Warum.

Erst Jahre später sollte ich erfahren, dass diese beeindruckenden, aber harmlosen Spiegelspielereien im Mittelpunkt eines beziehungsreichen Geflechts von Begriffen und Anwendungen stehen: Reflexionsgruppen, Festkörperphysik, Billardspielen, Tarnflugzeuge, Entfernungsmessungen bis zum Mond, Chaos, hyperbolische Geometrie und Weihnachtskugeln. Dieser Artikel soll einen kleinen Spaziergang durch all diese Begriffe (und einige mehr) darstellen.

1. Gute Winkel, schlechte Winkel

Ein einziger Spiegel ist, mathematisch betrachtet, nicht gerade extrem spannend. Man kann zwar Stunden damit zubringen zu diskutieren, ob dieser jetzt links und rechts, oben und unten oder vorne und hinten vertauscht (was tut er denn nun eigentlich?), aber so richtig interessant wird es erst, wenn man zwei Spiegel betrachtet, die einander wechselseitig spiegeln; und an diesem Punkt soll unser Ausflug beginnen. Betrachten wir zwei ebene Spiegel (man stellt sich am besten zwei Badezimmerspiegelkacheln vor), die entlang einer Kante miteinander verbunden sind. Der Winkel zwischen Ihnen soll frei einstellbar sein. Was sieht man, wenn man in den von beiden Spiegeln gebildeten Winkel schaut? Bild 1 gibt ein paar Eindrücke für verschiedene Winkel zwischen den Spiegeln. Es wurden einige Papierschnipsel und ein Pappwürfel als sich spiegelnde Objekte eingelegt. Es fällt auf, dass sich z.B. bei 90° und 60° der Eindruck eines perfekten Gesamtbildes ergibt, wohingegen sich z.B. bei 85° und 55° an der Kante, an der die Bilder zusammen treffen, charakteristische Bruchkanten im Bild ergeben (markiert durch einen gelben Kringel). Was passiert? Wir betrachten zunächst den Fall von 90° . Streng genommen setzt sich das wahrgenommene Bild aus insgesamt fünf

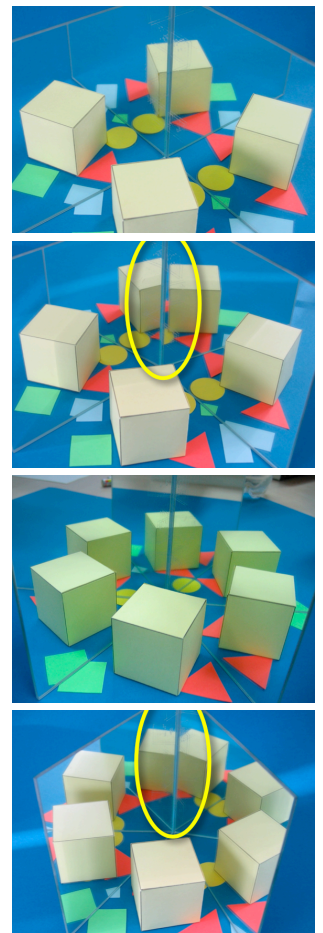


Bild 1. Klappspiegel mit 90° , 85° , 60° und 55°

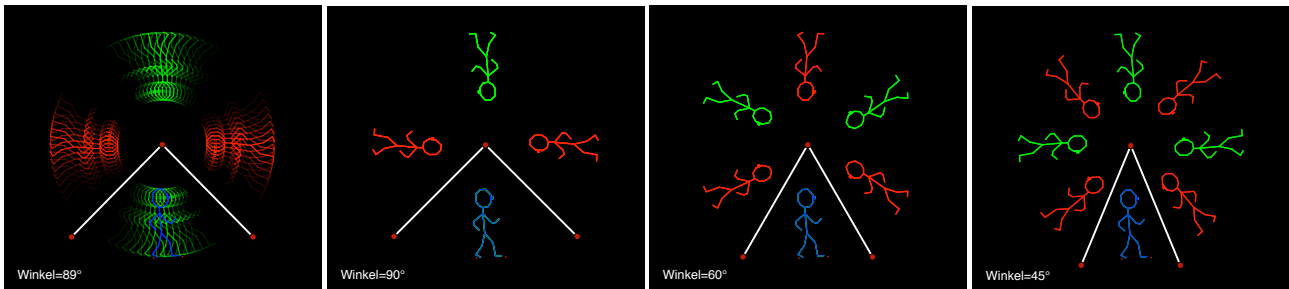


Bild 2. Klappspiegel in Computersimulation

Teilbildern zusammen. Zum einen sehen wir das Original unseres Würfels vor dem Spiegel. Dann sehen wir zwei direkte Spiegelbilder: eines im linken Spiegel und eines im rechten Spiegel. Und dann nehmen wir noch zwei gespiegelte Spiegelbilder wahr. Wir sehen im rechten Spiegel das Spiegelbild des linken Spiegels und im linken Spiegel das Spiegelbild des rechten Spiegels. Diese beiden gespiegelten Spiegelbilder treffen an der Kante, an der sich die Spiegel berühren, aufeinander. Dass diese beiden Bilder nahtlos aneinander passen, ist eine Eigenschaft des Winkels, unter dem die Spiegel aufeinander treffen. Man kann eine notwendige mathematische Bedingung an den Winkel einfach herleiten: Betrachtet man die gesamte Szenerie, die man bei einem 90° Winkel wahrnimmt, so stellt man fest, dass jeder der beiden Spiegel eine Symmetrieachse erzwingt. Die gesamte Szenerie wird also in vier gleich große Winkelsegmente aufgeteilt. Jedes dieser Winkelsegmente muss also $360^\circ/4 = 90^\circ$ groß. Eines dieser Segmente ist natürlich der zwischen unseren beiden Spiegeln eingeschlossene Bereich, also umfasst dieser 90° .

Für welche Winkel entstehen nun andere Bilder, die „perfekt“ sind und keinerlei Bruchkanten aufweisen? Geht man wieder von der Gesamtszenerie aus, so erzeugen die beiden Spiegel wieder jeweils eine Symmetrieachse die durch die Szenerie geht. Weiterhin muss das Bild wieder in gleich große „Tortenstückchen“ aufgeteilt werden. Diese Tortenstückchen dürfen von den Symmetrieachsen nicht zerteilt werden. Also muss die gesamte Anzahl der Tortenstückchen gerade sein. Vier solche Stücke ergaben 90° . Sechs solche Stückchen ergeben $360^\circ/6 = 60^\circ$; der zweite Winkel, für den wir ein gutes Bild erhielten. Analog folgen weitere „gute“ Winkel für acht, zehn, zwölf, usw. Tortenstückchen. Die entsprechenden Winkel sind 45° , 36° , 30° , etc. Bild 2 verdeutlicht die Situation nochmals anhand einer computergenerierten Draufsicht auf die Szenerie. Das Originalobjekt ist hierbei blau dargestellt, die Spiegelbilder, je nachdem, ob sie die gleiche Orientierung wie das Original haben oder nicht, in grün oder in rot. (Das dort abgebildete Strichmännchen ist übrigens eine Anlehnung an das sehr lesenswerte und reich bebilderte Buch „Indra’s Pearls“ in dem es um sehr ästhetische symmetrische Muster geht. In diesem Buch wird diese Figur „Dr. Stickler“ genannt und oftmals herangezogen, wenn es um die Erklärung von Symmetrien geht. Diese Funktion soll er bei uns auch haben).

Fassen wir zusammen: Wollen wir mit zwei Spiegeln ein perfektes Bruchkanten freies Bild erzeugen, so kommen nur Winkel in Frage, die ein geradzahliges Teiler von 360° sind, also:

$$180^\circ, 90^\circ, 60^\circ, 45^\circ, 36^\circ, 30^\circ, 25.7142\dots^\circ, 22.5^\circ, \dots$$

Den ersten Winkel von 180° bei dem unsere beiden Spiegel einfach nur flach aufeinandertreffen, und wir genauso gut nur einen Spiegel verwenden hätten können, wollen wir als uninteressanten Spezialfall ausschließen. Statt von „geradzahligem Teilern

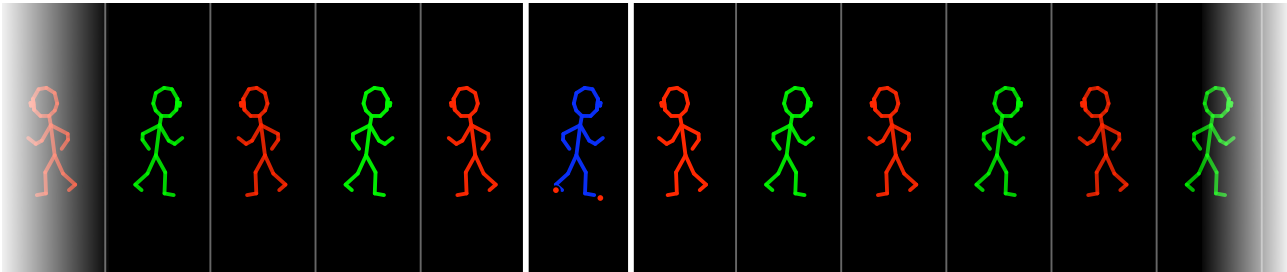


Bild 3. Dr. Stickler zwischen zwei parallelen Spiegeln

von 360°“ zu reden können wir auch einfacher sagen, dass wir an Teilern von 180° interessiert sind. Wir wollen diese Winkel im folgenden „gute“ Winkel nennen.

2. One, two, three ... infinity

Bleiben wir noch einen kleinen Moment bei Anordnungen, die sich mit zwei Spiegeln herstellen lassen. Und schauen wir uns einige Besonderheiten daran. Betrachten wir die Graphiken die letzten drei Teilbilder von Bild 2, so fällt zunächst auf, dass die grün und rot markierten Bilder sich rund um das Zentrum des Bildes (die Schnittachse der Spiegel) immer abwechseln. Dies wird dadurch klar, dass wir, wenn wir ausgehend von unserem blauen Dr. Stickler Original im Uhrzeigersinn weitergehen als nächstes dessen Spiegelbild sehen (rot), danach ein gespiegeltes Spiegelbild (dies ist wieder orientiert wie Dr. Stickler, also grün) danach ein gespiegeltes gespiegeltes Spiegelbild (wieder rot) und so weiter. Dabei fällt auch auf, dass man bei einem 90° Winkelspiegel direkt gegenüber von Dr. Stickler genau eine grüne Kopie seiner selbst findet. Diese ist genau so orientiert wie Dr. Stickler selbst. Man kann diesen Effekt auch beobachten, wenn man in einen 90° Winkelspiegel direkt auf die Ecke schauen. Dort sieht man ein gespiegeltes Spiegelbild. So wird man von anderen Menschen gesehen. Hebt man die rechte Hand, so tut dies auch dieses Spiegelbild. Nehmen wir an, Dr. Stickler sei ein Rechtshänder, so sind die Spiegelbilder abwechselnd rechtshändig (grün) und linkshändig (rot).

Klappen unsere Spiegel nun weiter zusammen, so nimmt die Anzahl der gespiegelten gespiegelten gespiegelten Spiegelbilder weiter zu. Nach einer grünen Kopie bei 90° entstehen drei bei 60°, vier bei 45° und so weiter. Für einen Winkel α erhalten wir $180^\circ/\alpha$ viele grüne Kopien. Im Grenzfall sind die Spiegel ganz auf einander geklappt und bilden einen Winkel von 0° miteinander. Nun ist natürlich kein Platz mehr zwischen ihnen, in den noch irgendwelche Objekte passen würden. Ziehen wir sie aber ein wenig auseinander (und wenn sich Dr. Stickler nun dünn macht), so können wir wieder Spiegelbilder erkennen. Nach unserer Formel müssten dies $180^\circ/0^\circ$ viele Bilder. Halt: Teilen durch 0 ist verboten. Das macht hier auch absolut Sinn, da auch keine vernünftige „Anzahl“ von Spiegelbildern mehr entsteht. Es sind nämlich *unendlich* viele (vgl. Bild 3).

3. Kaleidoskope - Schönschauer

Wie können wir nun mehr als zwei Spiegel anordnen, so dass sich zwischen zwei aufeinander treffenden Spiegeln immer ein „guter“ Winkel bildet? Diese Frage soll uns für den gesamten Rest des Artikels beschäftigen. Fangen wir an, indem wir eine vergleichsweise einfache Randbedingung fordern. *Die Kanten, an denen benachbarte Spiegel zusammen treffen, sollen alle in die gleiche Richtung zeigen.* Anders ausgedrückt: unsere



Bild 4. Blick in ein Kaleidoskop

Spiegel sollen so angeordnet sein, dass jeder Spiegel senkrecht zu einer Oberfläche (z.B. einer Tischplatte) steht. Die gemeinsame Schnittkante zweier Spiegel steht dann automatisch auch senkrecht auf der Tischplatte. Also zeigen alle Schnittkanten in die gleiche Richtung. Wir können uns nun ganz auf die Situation auf der Tischplatte beschränken, da die dort auftretenden Winkel denen zwischen den Spiegeln entsprechen. Welche Möglichkeiten gibt es also? Betrachten wir die ebene Situation auf unserer Tischplatte so stellen wir fest, dass wir an geschlossenen überschneidungsfreien n -Ecken interessiert sind, bei denen jeder Innenwinkel „gut“ ist. Dies erlaubt es uns, eine

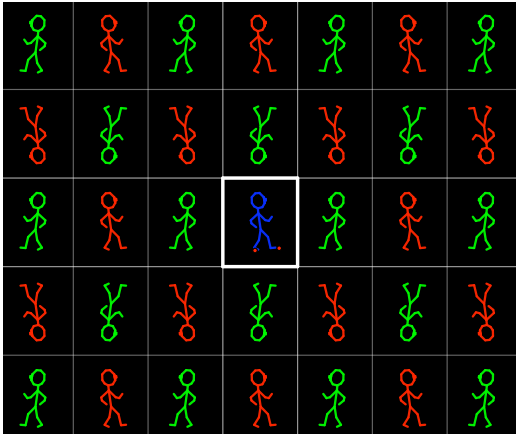


Bild 5. Die erste Spiegelkiste

vollständige mathematische Auflistung aller Möglichkeiten durchzuführen. Aus der Schule erinnert man sich vielleicht noch daran, dass die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt. Etwas allgemeiner gilt, dass die Summe der Innenwinkel eines n -Ecks insgesamt $180^\circ \cdot (n-2)$ beträgt. Die Summe der Innenwinkel im Viereck ist also 360° , die im 5-Eck ist 540° , usw. Der größtmögliche „gute“ Winkel ist 90° . Man kann sich leicht davon überzeugen, dass es außer bei Dreiecken und Vierecken gar nicht möglich ist, eine solche Anordnung zu bilden. So ergibt sich beispielsweise beim 5-Eck eine maximale Innenwinkelsumme von $5 \cdot 90^\circ = 450^\circ$, was aber zu wenig ist.

Die Situation beim *Viereck* ist eindeutig. Es muss eine Innenwinkelsumme von 360° erreicht werden, was genau und ausschließlich bei vier mal 90° passiert. Somit ergibt sich als einzige Möglichkeit, dass alle vier Eckwinkel genau 90° betragen und wir erhalten ein Rechteck. Gegenüberliegende Seiten sind parallel. Befindet sich unser Dr. Stickler in einem solche Spiegelschrank, wird er nach allen Seiten in die Unendlichkeit fortgesetzt Spiegelbilder von sich wiederfinden. Mancher Leser mag diesen Effekt vielleicht auch schon in dem einen oder anderen Kaufhausfahrstuhl erlebt haben.

Welche Möglichkeiten ergeben sich nun für ein *Dreieck*? Wir suchen nach drei guten Winkeln, deren Summe genau 180° ist. Viele Möglichkeiten gibt es da nicht. Der größte Mögliche Winkel ist 90° . Die restlichen beiden Winkel sollen zusammen die restlichen 90° ergeben. Fordert man ferner, dass jeder Winkel größer als 0° sein soll, so bleiben nur die beiden Möglichkeiten 45° & 45° und 60° & 30° übrig. Beträgt der größte Winkel 60° , so müssen sich die restliche 120° der Winkelsumme auf die anderen beiden Winkel verteilen. Die einzige Möglichkeit, die jetzt übrig bleibt ist 60° & 60° . Ein noch kleinerer größter Winkel ist nicht möglich. Zusammenfassend ergeben sich also für das Dreieck die folgenden drei Möglichkeiten:

$$(90^\circ, 45^\circ, 45^\circ) \text{ und } (90^\circ, 60^\circ, 30^\circ) \text{ und } (60^\circ, 60^\circ, 60^\circ).$$

Baut man diese drei Objekte jeweils aus drei Spiegeln, so ergibt sich, wenn wir etwas in die Spiegelkammer hineinlegen, nach allen Seiten hin ein sich ins Unendliche wiederholendes Muster. Die drei Teilbilder von Bild 6 geben genau diese drei verschiedenen Fälle wieder. In gewisser Weise stellen diese drei Bilder gemeinsam mit der Situation in Bild 5 die vier einzig möglichen perfekten Überdeckungen der Ebene mit n -Ecken dar, bei denen jeweils je zwei sich berührende n -Ecke bezüglich der gemeinsamen Berührkante spiegelsymmetrisch liegen.

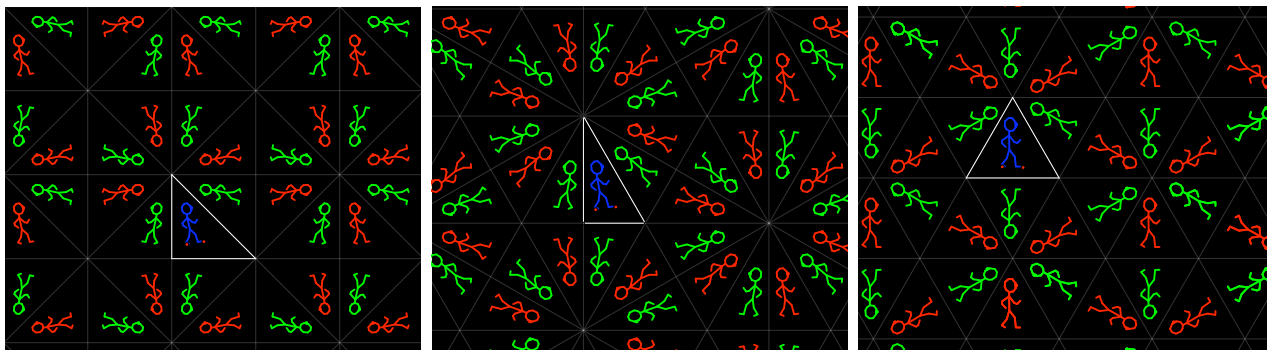


Bild 6. Die drei einzig möglichen Dreieckskaleidoskope

Dass es sich bei all diesen Überlegungen nicht um graue Theorie handelt, sieht man z.B. an Bild 7 unten. Dort ist ein Blick in ein reales $(90^\circ, 45^\circ, 45^\circ)$ Kaleidoskop zu sehen. Auch die Spiegelkammer mit $(60^\circ, 60^\circ, 60^\circ)$ ist ein allgemein bekanntes Objekt. Als Kinderspielzeug oder Kunsthandwerk vertriebene Kaleidoskope sind oftmals mit genau diesen Winkelmaßen gebaut. Übrigens heißt Kaleidoskop wörtlich übersetzt „Schönschauer“ und macht damit seinem Namen wirklich alle Ehre. Leider sind Kaufhausfahrstühle in der Regel nicht dreieckig.

4. Zahlenspiele

Wir wollen nun ein wenig Mathematik betreiben und uns die Winkelverhältnisse ein wenig genauer anschauen. Hierzu ordnen wir jedem „guten“ Winkel α seinen so genannten Index zu. Dieser gibt einfach an, wie oft α in 180° hineinpasst. Der 90° Winkel hat also Index 2, der 60° Winkel hat Index 3, der 45° Winkel hat Index 4 und so weiter. Betrachten wir nun die zu einem Dreieckskaleidoskop gehörigen Indizes so ergibt sich die folgende Entsprechung:

$$(90^\circ, 45^\circ, 45^\circ) \sim (2, 4, 4)$$

$$(90^\circ, 60^\circ, 30^\circ) \sim (2, 3, 6)$$

$$(60^\circ, 60^\circ, 60^\circ) \sim (3, 3, 3)$$

Dabei fällt folgendes auf: Sind (a, b, c) die drei Indizes eines Kaleidoskopdreiecks, dann gilt:

$$1/a + 1/b + 1/c = 1$$

In der Tat ist obige Gleichung nichts anderes als eine vornehme Formulierung der Tatsache, dass die Innenwinkelsumme im Dreieck 180° beträgt. Unser Problem, alle mögliche Dreieckskaleidoskope aufzuzählen kann man also auch folgendermaßen formulieren: *Suche drei ganze Zahlen a, b, c , so dass diese die Gleichung $1/a + 1/b + 1/c = 1$ erfüllen.* Das Aufzählungsproblem ist dadurch zwar nicht viel einfacher geworden, aber um einiges übersichtlicher. Den drei Indextripeln entsprechen die Gleichungen

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

und dies sind auch die einzigen Möglichkeiten.



Bild 7. Blick in ein $(90^\circ, 45^\circ, 45^\circ)$ Kaleidoskop

5. Lichtbillard, Anti-Tarnboote und Egoistenspiegel

Es gibt auch noch andere Möglichkeiten drei Spiegel so anzuordnen, dass diese paarweise „gute“ Winkel miteinander bilden. Die einfachste dieser Möglichkeiten führt uns direkt zu Großmutter's Spiegelschrank. Stellen wir uns eine Ecke eines Raumes vor, bei der wir den Fußboden, sowie die beiden Wände mit Spiegeln versehen haben. Diese drei Spiegel stehen paarweise senkrecht aufeinander. Diese Anordnung hat einige bemerkenswerte Eigenschaften. Zunächst einmal ergibt der Blick

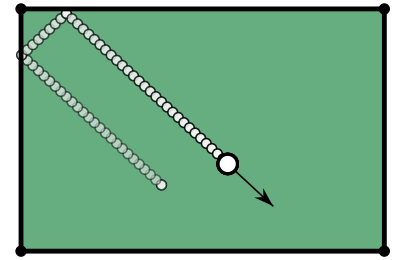
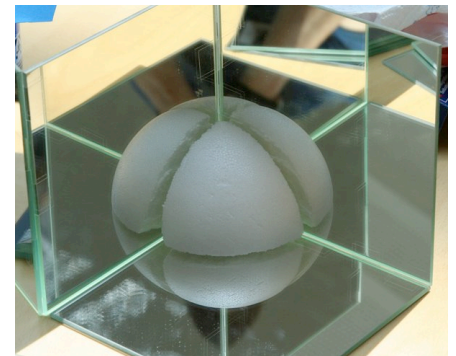


Bild 8. Billard spielen

in eine solche Anordnung wieder ein perfektes Bild. Das gespiegelte Objekt ist hierbei insgesamt achtmal zu sehen (das Original mit eingeschlossen). Ferner ergibt sich ein bemerkenswerter Strahlengang. Stellt man sich selbst vor solch eine Würfelspiegelecke und kneift ein Auge zu, so wird man das andere Auge stets genau in dem Eckpunkt sehen, an dem die drei Spiegel zusammen treffen. Wie kommt das? Betrachten wir zunächst ein zweidimensionales Analogon. Schießt man beim Billardspielen einen Ball genau in eine Ecke, so kommt er nach zwei Banden genau in der entgegengesetzten Richtung wieder heraus, in die man ihn hineingeschossen hat. Dies ist eine direkte Konsequenz des *Einfallswinkel = Ausfallswinkel* Gesetzes der Reflexion. Bei unserer Spiegelecke passiert nun im Prinzip genau das Gleiche, bloß dreidimensional. Würde man aus beliebiger Richtung mit voller Wucht einen Tennisball in diese Ecke werfen (so dass die Erdanziehung vernachlässigbar ist), so springt dieser ebenso in der entgegengesetzten Richtung heraus wie unser zweidimensionaler Billardball – vorausgesetzt die Spiegelscheiben überleben das.



Bei einem in den Spiegel einfallenden Lichtstrahl ist die Situation analog: er wird mit einem leichten parallelen Offset genau in die Richtung zurückgeworfen, aus der er gekommen ist. Schaut man von irgend einer Richtung in das Spiegeleck, so sieht man immer sich selbst (ideal für Egoisten). Dieses Prinzip hat vielfältige technische und ästhetische Anwendungen. Die Tatsache, dass ein solcher so genannter *Tripelspiegel* das Licht genau in die Richtung zurück wirft, aus der es kommt, wird beispielsweise beim Fahrradrückstrahler eingesetzt. Schaut man sich ein solches „Katzenauge“ genau an, so stellt man fest, dass es aus lauter winzig kleinen Tripelspiegeln aufgebaut ist. Wird ein solcher Strahler vom Licht eines Autoscheinwerfers getroffen, so wirft er das Licht genau in die Richtung zurück aus der es kommt, also in Richtung Auto. Auch bei der Fernpeilung findet dieser Effekt seine Anwendung. Landvermesser sind mit optische Geräten ausgestattet, mit denen es möglich ist, einen Laserstrahl genau zurückzuwerfen ohne Stundenlang einen Spiegel justieren zu müssen. Diese Geräte sind nichts anderes als hochwertige Tripelspiegel. In Extremform wurde diese Art der Fernpeilung bei der ersten Längenvermessung zwischen Erde und Mond eingesetzt. Astronauten hinterließen auf dem Mond einen Tripelspiegel der von der Erde aus sichtbar ist. Dieser Tripelspiegel wurde sodann von der Erde mit einem Laserstrahl bestrahlt. Durch die Geometrie der Spiegelanordnung war sichergestellt, dass der Lichtstrahl sehr präzise wieder an die Stelle zurückgeworfen wurde, von der er ausgesandt wurde. Eine Messung der Zeitdifferenz zwischen abgeschickten und

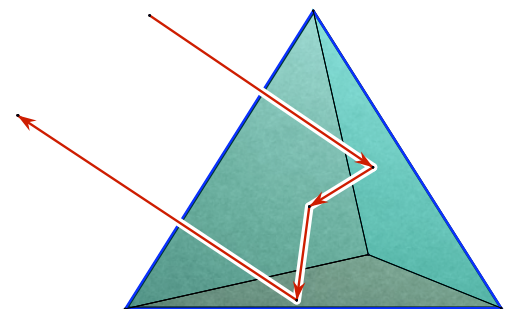


Bild 9. Spiegelecke konkret und abstrakt



angekommenen Lichtimpuls (immerhin ca. 2.6 Sekunden) ermöglicht es, die Entfernung zum Mond sehr exakt zu bestimmen.

Eine weitere Anwendung vergleichbar zum Fahrradrückstrahler liegt dann vor, wenn man unbedingt gesehen werden möchte, wie zum Beispiel der Kajakfahrer in Bild 10. Dieser führt (rot umkringelt) einen so genannten Radar-Reflektor mit sich. Dies ist ein einfaches Gebilde aus drei ineinander gesteckten Metallscheiben. Egal von welcher Seite man dieses Objekt anschaut, man sieht immer in die Ecke eines metallenen Würfelspiegels. Wird das Boot nun von irgend einem Radarstrahl getroffen, so wird dieser auf alle Fälle in Richtung des aussendenden Bootes zurückgeworfen. Das kleine Kajak ist somit für große Schiffe auf alle Fälle sichtbar.



Ganz im Gegensatz zum im Bild 10 unten abgebildeten Tarnboot á la James Bond. Hier wird, im krassen Gegensatz zum Tripelspiegel, darauf geachtet, dass keinerlei konkave Kanten der Metallverschalung auftreten. Das Ergebnis ist auch genau das zum Radar Reflektor entgegengesetzte. Das Tarnboot ist für andere Boote per Radar so gut wie unsichtbar. Nur aus bestimmten Winkeln (die alle deutlich oberhalb der Wasseroberfläche liegen) kann das Boot per Radar entdeckt werden. Tarnflugzeuge sind nach einem vergleichbaren Prinzip aufgebaut.

Bild 10. Nautische Exkursionen

6. Der perfekte Vitrinenschrank

Bleiben wir noch für einen kleinen Moment bei Spiegeln, die senkrecht aufeinander stehen. Die Wände eines Würfels treffen an den Kanten ebenfalls senkrecht aufeinander. Wenn wir die Innenflächen eines würfelförmigen Kastens verspiegeln, so erhalten wir ein räumliches Objekt bei dem wir ausschließlich „gute“ Winkel haben. Was würden wir beobachten, wenn wir uns im Inneren dieses Würfels befänden. Unter der Voraussetzung, dass wir eine Taschenlampe mitgenommen haben, können wir nach allen Seiten ein sich perfekt in die Unendlichkeit fortsetzendes Bild sehen. Das Innere unserer Spiegelbox (und damit wir selbst) wird nach allen Seiten hin kopiert und zwar abwechselnd „linkshändig“ und „rechtshändig“. Wie ein dreidimensionales unendlich großes Schachbrett. Natürlich ist es ein wenig aufwändig eine solche Spiegelbox zu bauen, insbesondere wenn sie auch noch eine Tür zum Ein- und Ausgehen haben soll. Mit einem kleinen Trick kann man sich jedoch

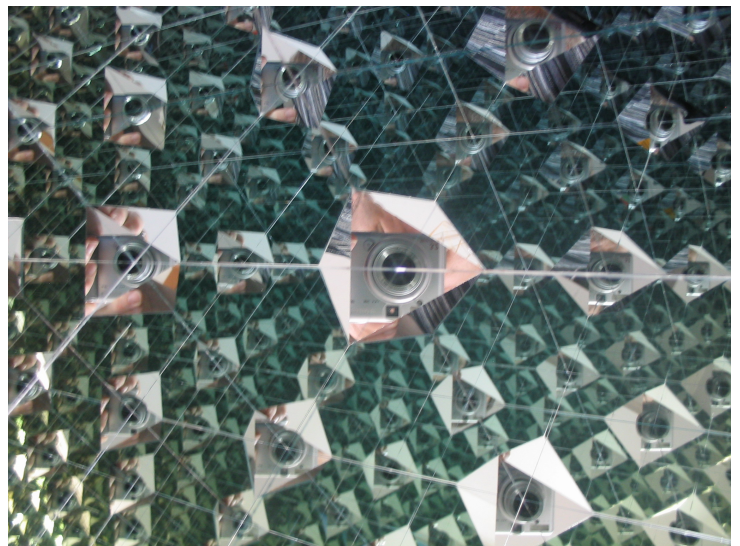


Bild 11. Das Innere einer Spiegelkiste

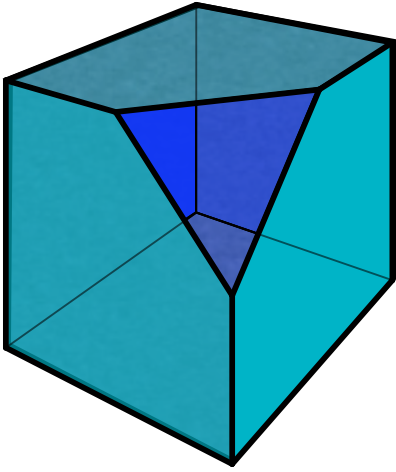


Bild 12. Würfel mit abgeschnittener Ecke

aus quadratischen Badezimmerspiegelkacheln (die kann man z.B. in den Größe 15cm x 15cm im Baumarkt kaufen) eine Spiegelbox herstellen, bei der man einen vergleichbaren Effekt sieht. Aus sechs solchen Spiegelkacheln kann man ohne großen Aufwand einen innen verspiegelten Würfel zusammenkleben. Um nun hineinschauen zu können, schneidet man am besten bei drei der Spiegelkacheln mit dem Glasschneider eine dreieckige Ecke ab (das Dreieck sollte rechtwinklig und gleichschenkelig sein mit z.B. 5cm Schenkellänge.) Man kann die Würfelseiten nun so zusammenkleben, dass statt einer der Ecken ein dreieckiges Loch zum reinschauen entsteht (siehe Bild 12). Die Photographie in Bild 11 zeigt einen Blick in eine solche Spiegelkammer. Durch die Spiegelungen vervollständigt sich das dreieckige Loch zu einem oktaederförmigen Gebilde (ein Oktaeder ist eine Doppel-

pyramide über einem Viereck). Im Bild sieht man auf jedem der Oktaeder die Kamera mit der das Bild aufgenommen wurde. Dieser Effekt ist wieder auf die „Egoistenspiegeleigenschaft“ einer Würfecke zurückzuführen. Egal wo man hinschaut, man sieht immer sich selbst.

7. Weg vom rechten Winkel

Durch die Betrachtung von Würfecken und Spiegelkisten sind wir von unserem eigentlichen Problem „Wie kann man Spiegel so anordnen, dass nur gute Winkel entstehen?“ etwas abgekommen. Dennoch haben wir etwas wichtiges gelernt. Neben den im Abschnitt 3 behandelten drei Kaleidoskopen gibt es noch weitere Möglichkeiten drei Spiegel mit nur guten Winkeln anzuordnen, z.B. unsere Würfelspiegelecke. Was passiert, wenn wir dort Winkelsummen berechnen oder Winkelindizes betrachten. Wir haben drei Spiegel, die sich jeweils unter 90° treffen. Diese Winkel können allerdings nicht mehr länger alle gleichzeitig senkrecht auf einer Tischplatte stehen. Statt dessen, treffen sich die drei Spiegel in einem Punkt. Legen wir um diesen Punkt eine Kugel (siehe Bild 9 oben) so schneiden die drei Spiegelebenen aus dieser Kugel ein sphärisches Dreieck heraus. Die (sphärischen) Innenwinkel dieses Dreiecks summieren sich zu $3 \cdot 90^\circ = 270^\circ$. In der Tat ist die Winkelsumme in einem sphärischen Dreieck tatsächlich immer größer als 180° . Um nun alle Anordnungen mit „guten“ Winkeln bei drei Spiegeln zu studieren, bei denen die Spiegelebenen sich in einem Punkt treffen, müssen wir folgendes tun: Wir suchen alle Tripel von „guten“ Winkeln, bei denen die Winkelsumme größer als 180° ist. Bezogen auf die Indizes unserer drei Winkel sind wir an allen Tripeln (a, b, c) interessiert, für die die Ungleichung $1/a + 1/b + 1/c > 1$ gilt.

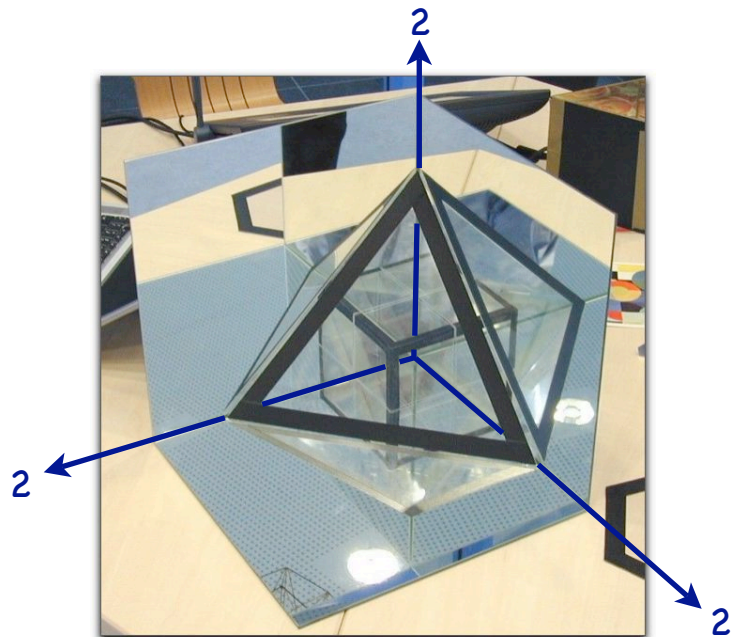
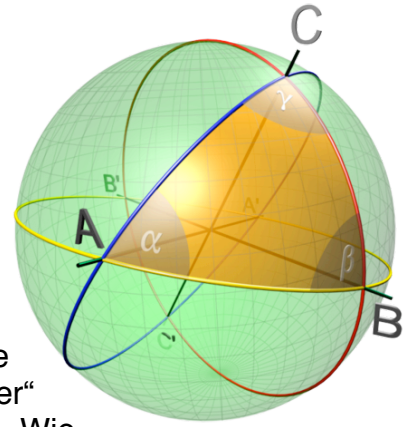


Bild 13. Indizes bei der Würfelspiegelecke

Einen ersten solchen Kandidaten haben wir bereits kennen gelernt: für die Würfelspiegelecke sind alle drei Indizes gleich zwei und wir erhalten $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} > 1$. Tatsächlich reichen schon bereits zwei Winkel mit 90° aus um durch $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ den Grenzwert 1 zu erreichen. Addieren wir danach einen noch so kleinen Winkel dazu, so wird die Winkelsumme größer als 180° . Dies bedeutet, dass wir schon einmal eine unendliche Klasse von Spiegelanordnungen finden: man wähle die Winkel $(90^\circ, 90^\circ, \alpha)$ wobei α ein beliebiger noch so kleiner „guter“ Winkel ist. Geometrisch entspricht dies der folgenden Situation. Wie nehmen unseren Klappspiegel aus Abschnitt 2 und stellen ihn, statt auf eine Tischplatte, einfach auf einen dritten Spiegel. Zugegebenermaßen ist diese Konfiguration nicht gerade viel spannender als unser ursprünglicher Klappspiegel.



Aber es gibt noch weitere Möglichkeiten – drei um genau zu sein. Wir haben schon gesehen, dass wir für drei 60° Winkel die Winkelsumme 180° genau erreichen. Dies bedeutet, dass in einem sphärischen Dreieck mindestens einer der Winkel 90° betragen muss. Welche Möglichkeiten ergeben sich nun für die anderen beiden Winkel, wenn diese beide unter 90° sein sollen. Wären beide kleiner oder gleich 45° so wäre die Winkelsumme nicht größer als 180° . Also muss mindestens einer der Winkel 60° betragen. Somit betrachten wir also alle Winkeltripel $(90^\circ, 60^\circ, \alpha)$, wobei α groß genug sein muss, damit die Winkelsumme 180° überschritten wird. Es bleiben genau drei Möglichkeiten:

$$(90^\circ, 60^\circ, 60^\circ) \text{ und } (90^\circ, 60^\circ, 45^\circ) \text{ und } (90^\circ, 60^\circ, 36^\circ).$$

Falls man die Sprache der Indizes bevorzugt entspricht dies den Zahlentripeln $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$ und $(2, 3, 5)$. Jede dieser Möglichkeiten führt zu einem Kaleidoskop, bei dem sich

die Spiegelbilder der eingelegten Objekte perfekt zu einer räumlichen (kugelförmigen) Struktur ergänzen. Über die Strukturen der so entstehenden Spiegelungsmuster ließen sich ganze Bücher füllen. Wir wollen uns hier auf einige der wesentlichsten Eigenschaften beschränken. Genau so, wie bei unserern ebenen Kaleidoskopen aus Abschnitt 3 die fortwährend gespiegelten Dreiecke die ganze Ebene ausfüllen, so füllen nun die fortwährend gespiegelten Dreiecke nahtlos die ganze Kugeloberfläche aus. Das heißt, dass sich der Ursprungsinhalt unseres elementaren Kaleidoskopdreiecks wieder und wieder auf der Kugeloberfläche wiederholt. Da der Flächeninhalt unseres Dreiecks bei der Spiegelung weder kleiner noch größer wird, passen somit (im Gegensatz zur Ebene) nur endlich viele Kopien auf die Kugeloberfläche. Bild 15 zeigt die

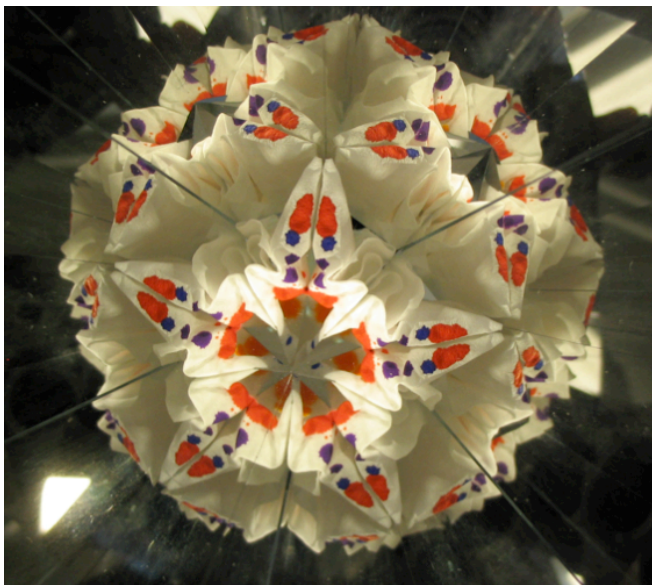


Bild 14. Blick in ein $(90^\circ, 60^\circ, 36^\circ)$ Kaleidoskop

drei Kugelüberdeckungen, die wir für unsere oben angegebenen Kaleidoskope der Reihe nach erhalten. Die Dreiecke sind dabei abwechselnd rot und blau gefärbt. Im Prinzip sind die roten Dreiecke alle „rechtshändig“ und die blauen Dreiecke alle „linkshändig“. Unsere ursprüngliche Kaleidoskopzelle ist dabei gar nicht mehr besonders gekennzeichnet, da ohnehin alle Dreiecke gleichberechtigt sind. Im Prinzip könnte jedes der Dreiecke die Rolle der ursprünglichen Kaleidoskopzelle spielen. Der Reihe nach erhalten wir dabei

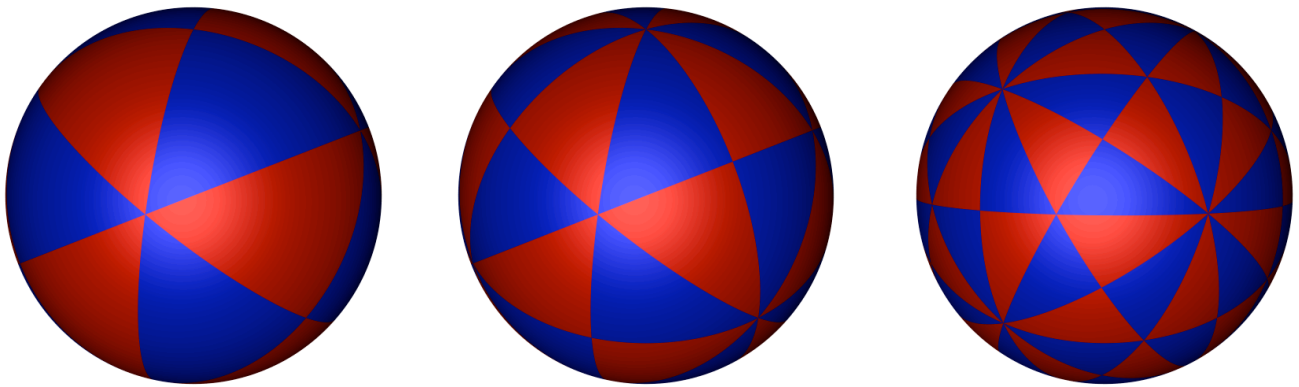


Bild 15. Reguläre Überdeckungen einer Kugel mit gespiegelten Dreiecken

Überdeckungen der Kugel mit 24, mit 48, und mit 120 Dreiecken. Es ist erstaunlich, dass wir diese Zahlen direkt aus unseren Indizes berechnen können. Sind (a, b, c) die Indize unseres Kaleidoskops, so ergibt sich die Anzahl der Dreiecke als

$$\frac{4}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 1}$$

8. Platonische Schönheiten

Unsere sphärischen Kaleidoskopmuster haben auch direkt etwas mit der Geometrie der so genannten *Platonischen Körper* zu tun. Diese Platonischen Körper sind dreidimensionale Objekte, die ausschließlich aus regelmäßigen n -Ecken aufgebaut sind. Eine Aufzählung, nicht ganz unähnlich zu unser Aufzählung der ebenen Kaleidoskope zeigt, dass es nur genau fünf solche Körper geben kann. Der *Tetraeder*, aufgebaut aus vier Dreiecken. Der *Oktaeder*, aufgebaut aus acht Dreiecken. Der *Würfel* aufgebaut aus sechs Vierecken. Der *Ikosaeder* aufgebaut aus zwanzig Dreiecken. Und schließlich der *Dodekaeder* aufgebaut aus zwölf Fünfecken. All diese Körper sind in Abbildung 16 dargestellt. Jeder einzelne dieser Platonischen Körper weist viele Spiegelsymmetrien auf. Ebenso hat er an den Schnittgeraden der Symmetrieebenen auch Drehsymmetrieachsen. Tatsächlich lässt sich jeder der Platonischen Körper dadurch erzeugen, dass man in eines der im letzten Abschnitt aufgeführten Kaleidoskope einen geeigneten Einlegbaustein legt. Die Kanten der Kaleidoskope entsprechen hierbei den Symmetrieachsen des Platonischen Körpers. Man kann sich dies am besten durch die Symmetrien der Ecken, Kanten und Flächen der Platonischen Körper verdeutlichen. Fangen wir beim kompliziertesten Körper an. Der Dodekaeder hat reguläre *Fünfecke* als Seiten. An jeder Ecke treffen *drei* dieser Fünfecke perfekt symmetrisch zusammen. Entlang einer Kante treffen sich *zwei* Flächen in perfekter

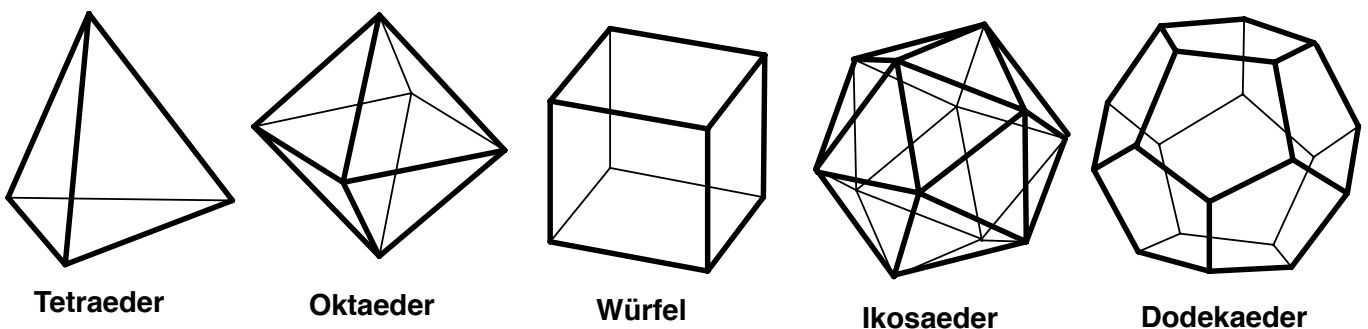


Bild 16. Die Platonischen Körper

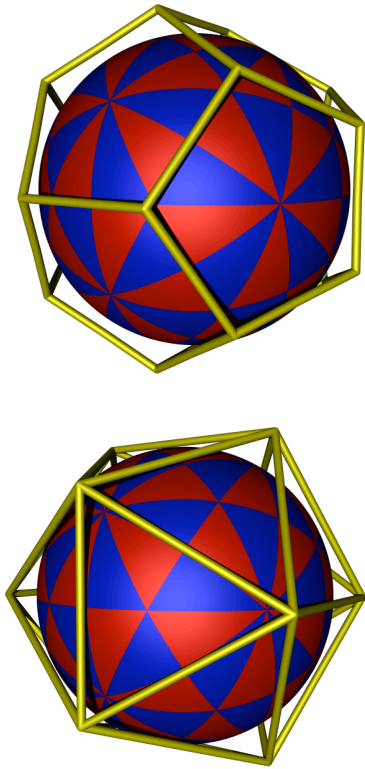


Bild 17. Symmetrien von Iko-
saeder und Dodekaeder

Symmetrie. Die Zahlen (5, 3, 2) entsprechen genau den Indizes unseres letzten Kaleidoskops (in umgekehrter Reihenfolge). Beim Iksaeder treffen sich an jeder Ecke *fünf Dreiecke* und wir erhalten wieder (5, 3, 2). Beim Würfel sind es *drei Vierecke*. Wir erhalten die Indizes (4, 3, 2), unser zweites Kaleidoskop. Bei Oktaeder treffen an jeder Ecke *vier Dreiecke* zusammen, was wieder zum gleichen Kaleidoskop führt. Und schließlich beim Tetraeder treffen sich an jeder Ecke *drei Dreiecke*, was zu unserem letzten Kaleidoskop mit Indices (3, 3, 2) führt. Die Spiegelachsen der Platonischen Körper fallen genau mit den Spiegelachsen unserer Kugelüberdeckungen in Bild 15 zusammen. Abbildung 17 verdeutlicht diesen Zusammenhang am Beispiel von Iksaeder und Dodekaeder. Bei richtiger Drehung der Kugel liegen bestimmte Eckpunkte des Dodekaeders exakt über bestimmten Ecken unserer (2, 3, 5)-Kugelüberdeckung. Die Kantenmitten liegen über anderen Dreieckspunkten. Die Flächenmittelpunkte schließlich liegen über den verbleibenden Dreieckspunkten. Die Situation beim Iksaeder ist (mit haargenau der gleichen Kugel) die gleiche, nur dass sich die Position der Ecken und der Flächenmitten vertauschen. Mit dem Würfel, dem Oktaeder und dem Tetraeder lässt sich genau die gleiche Entsprechung durchführen, man muss lediglich unsere anderen Kugelüberdeckungen heranziehen.

9. Weihnachts-Chaos

Bisher waren all unsere Spiegel eben. Was passiert, wenn wir kugelförmige Spiegel zulassen? Legt man zwei verspiegelte Kugeln direkt aneinander, so dass diese sich berühren, so sieht man in der einen Kugel das Spiegelbild der anderen. In diesem Spiegelbild wiederum das Spiegelbild der Ersten und so weiter. Im Gegensatz zu unseren Überlegungen mit ebenen Spiegeln kann man im Fall von Kugeln die gesamte gespiegelte Kette auf der Oberfläche der Kugeln sehen. Wir erhalten eine unendliche Kette, die auf die endliche Oberfläche der Kugel zusammengequetscht ist. Legt man drei Kugeln aneinander, so dass sich jeweils zwei paarweise berühren, so entsteht sogar ein unendlich feiner Ring von sich immer wieder ineinander spiegelnder Kugeln (Bild 18 oben). Richtig interessant wird das Ganze, wenn man eine weitere Kugel auf diese drei Kugeln drauflegt, analog zu einem Orangenstapel im Supermarkt. Auf diese Weise berührt jede einzelne der vier Kugeln die drei anderen (Bild 18 mitte). Schaut man in die kleine Öffnung die sich zwischen drei Kugeln ergibt, so sieht man ein Muster welches sich immer weiter in alle Richtungen verfeinert. In Bild 18 unten ist eine Computersimulation dieser Situation dargestellt. Man muss es allerdings nicht bei Computersimulationen belassen. Im Jahr 1999 gelang es David Sweet, Edvard Ott und James A. Yorke von der University of Maryland eine spektakuläre Photographie

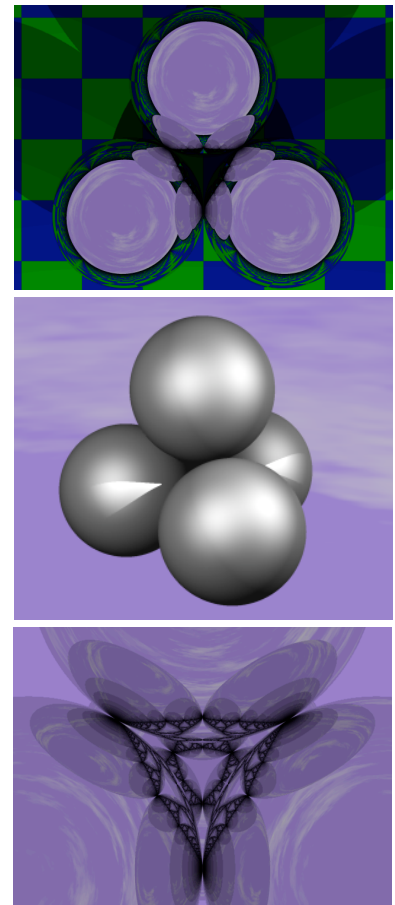


Bild 18 Kugelspiegelungen

zu machen, die in mehreren Wissenschaftszeitungen in der Rubrik „Bild des Monats“ veröffentlicht wurde. Sie benötigten dazu nicht mehr als vier gut gearbeitete Weihnachtskugeln, drei Stücke farbige Pappe (rot, weiß, blau) eine Lichtquelle, eine einfache Kamera und viel Geduld. Bild 19 nebenan stellt entstammt der original Bilderserie dieser Arbeit. Die Farben entstehen dadurch, dass an den Rand eines jeden der drei anderen Löcher, die sich zwischen den Kugeln bilden, ein farbiges Stück Pappe angelegt wird. Das fraktale Muster der Farben rot/blau/weiß/schwarz entsteht durch die Sehstrahlen. Diese werden so lange wild zwischen den vier Kugeloberflächen hin und her reflektiert bis sie zu einem der Zwischenräume entweichen. Eine kleine Änderung des Blickwinkels bewirkt, dass der Blick aus einem anderen Loch austritt und somit auf eine andere Farbe trifft. Man hat es in diesem Fall mit einer Art von „deterministischem Chaos“ zu tun. Ein typisches Merkmal von Strukturen, die im mathematischen Sinn chaotisch sind, ist die Eigenschaft, dass eine kleine Änderung der Anfangsparameter (wohin schaue ich?) eine große Änderung des globalen Verhaltens (welche Farbe sehe ich?) bewirken kann. Mathematisch streng genommen stellt die Kugelphotographie ein physikalische Realisierung eines abstrakten Phänomens den so genannten „Wada Basins“ dar.

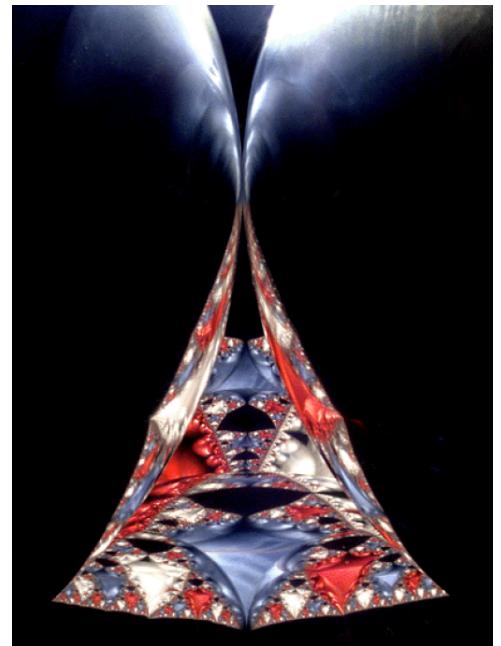


Bild 19. Chaos in Weihnachtskugeln

10. Kreise spiegeln

Physikalische Kugelspiegelungen haben einen großen Nachteil. Das Spiegelbild einer Kugel in einer Kugel ist keine Kugel mehr, sondern sieht irgendwie verzerrt eiförmig aus. Es gibt allerdings eine mathematische Operation, die so genannte *Kreisspiegelung*. Die hat die Eigenschaft, dass einerseits das Spiegelbild eines Kreises wieder ein Kreis (oder eine Gerade) ist und andererseits unter der Spiegelung den Winkel zwischen Objekten erhalten werden. Die Kreisspiegelung wird rein mathematisch definiert, und darf nicht mit

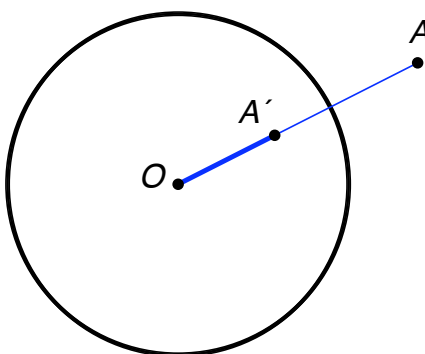


Bild 19. Spiegelung am Kreis

einer echten physikalischen Spiegelung verwechselt werden. Sie hat aber viele sehr interessante Eigenschaften, die sie in der Mathematik zu einer der bevorzugten Verallgemeinerung der Ebenenspiegelung machen. Wir können die Kreisspiegelung definieren, indem wir uns zunächst auf den Einheitskreis (einen Kreis mit Mittelpunkt O und Radius 1) beschränken. Alle anderen Fälle erhalten wir durch Verschiebung und Skalierung. Die Kreisspiegelung bildet nun das Äußere des Kreises auf dessen Inneres ab (und umgekehrt). Ein Punkt A wird abgebildet auf einen Punkt A' , der auf der Verbindungsgeraden von A und O liegt. Die genaue Position wird so gewählt, dass die Entfernungen zu O die Bedingung $|A',O| = 1/|A,O|$ erfüllt. Wie bei einem echten

Spiegel werden Punkte, die direkt auf der Spiegelfläche liegen (unserem Kreis) durch die Spiegelung auf sich selbst abgebildet. Ebenso wie bei normalen ebenen Spiegeln können wir zwei Kreisspiegelungen benutzen um eine Art „Winkelkreisklappspiegel“ zu „bauen“. Schneiden sich zwei Kreise unter einem Winkel von z.B. 60° so ergeben die iterierten Kreisspiegelbilder genau wie bei ebenen Spiegeln ein perfektes Bild. Inklusive Original

sind insgesamt sechs Kopien eines Objektes sichtbar. In Bild 20 zeigt eine solche wiederholte Kreisspiegelung eines Quadrates. Es wird gezeigt, wie sich die Bilder eines hin und her gespiegelten Quadrates verhalten. Die zunächst einmal wichtigste Beobachtung ist, dass um den Schnittpunkt der Kreise genau sechs Objekte entstehen. Ferner fällt auf, dass die Spiegelbilder des Quadrates keine Quadrate mehr sind. Durch die Kreisspiegelung werden die ursprünglich geradlinigen Quadratseiten zu Kreisbögen verzerrt. Obwohl die Quadratseiten der Spiegelbilder keine Geraden mehr sind, erhält die Kreisspiegelung dennoch den Winkel unter dem sie sich treffen. An den Ecken der Spiegelbilder treffen die entsprechenden Seiten der gespiegelten Quadrate unter einem rechten Winkel zusammen. Der Experte sagt, die Kreisspiegelung ist *konform* oder, was das gleiche ist, *winkeltreu*.

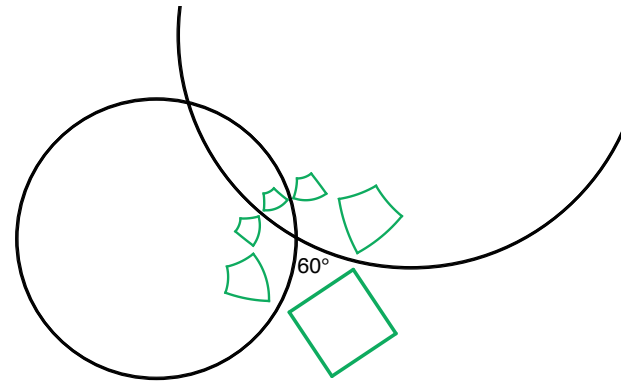


Bild 20. Iterierte Kreisspiegelung

11. Eine neue Welt

Kreisspiegelungen eröffnen uns eine vollkommen neue mathematische Welt. Mit flachen Spiegeln war es uns bisher ausschließlich möglich, Dreiecke zu bauen, deren Winkelsumme größer oder gleich 180° ist. Der Gleichheitsfall entsprach der Situation, die wir in Abschnitt 3 erläutert haben, der Fall von Winkeln größer als 180° entsprach den Dreiecksüberdeckungen der Kugel aus Abschnitt 7. Kreisspiegelungen ermöglichen es uns, Spiegeldreiecke aufzubauen, deren Winkelsumme weniger als 180° beträgt. Hierzu bauen wir ein Dreieck zusammen, das aus Kreisbögen besteht. Den Winkel zwischen zwei Kreisbögen definieren wir als den Winkel, unter dem sich die Tangenten an die Kreise im Schnittpunkt treffen. Sind alle Kreisbögen in Richtung des Dreiecksinneren gewölbt, so entsteht ein (Kreisbogen-)Dreieck, das eine Winkelsumme kleiner als 180° besitzt. Sind darüber hinaus die Winkel alles „gute“ Winkel, so ergibt sich über fortgesetzte Kreisspiegelungen ein Dreiecksmuster, das sich überlappungsfrei fortsetzen lässt. In der

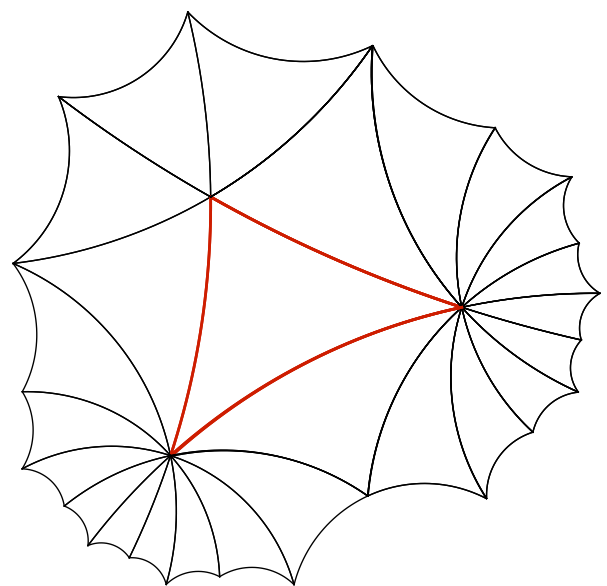
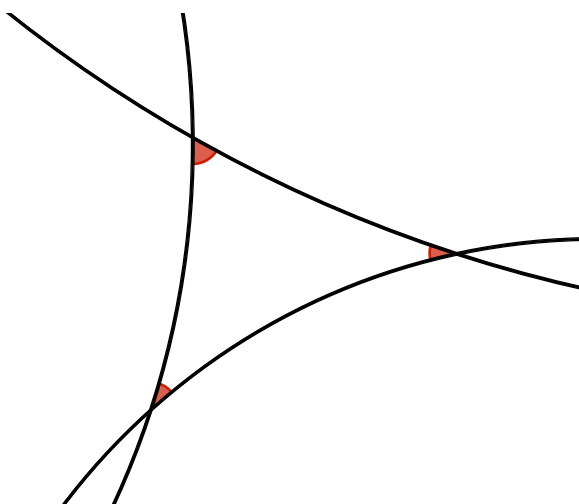
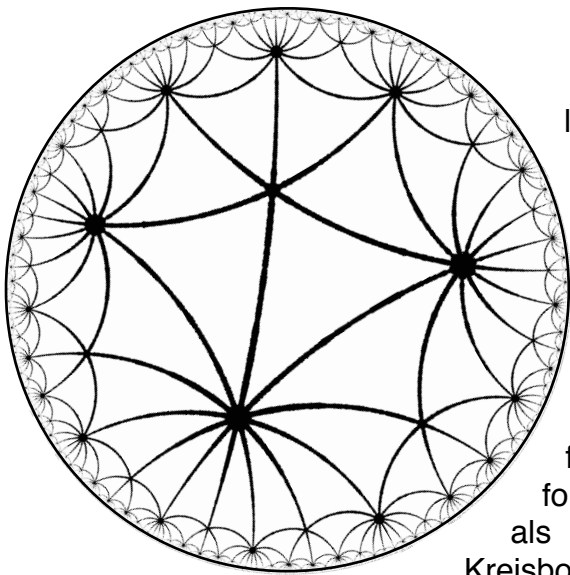


Bild 21. Kreisbogenkaleidoskop vom Typ $(60^\circ, 30^\circ, 30^\circ)$



linken Hälfte von Bild 21 ist ein Dreieck mit Winkeln (60° , 30° , 30°) angegeben. Um den 60° Winkel lassen sich über fortgesetzte Kreisspiegelung sechs solche Dreiecke platzieren, um die beiden 30° Winkeln jeweils zwölf derartige Dreiecke. Im rechten Teil von Bild 21 sind jeweils um die Ecken des Dreiecks die gespiegelten Dreiecke eingezeichnet. Alle diese Dreiecke haben (wegen der Winkeltreue der Kreisspiegelung) exakt die gleichen Winkel. Wie mit flachen Spiegeln erhält man auf diese Weise durch fortgesetzte Spiegelung unendlich viele Dreiecke. Anders als in den Kaleidoskopen in Bild 6 werden nun aber die Kreisbogendreiecke ab einem bestimmten Punkt fortwährend kleiner. Sie haben sogar noch eine viel merkwürdigere Eigenschaft.

Die Fläche, die in der Ebene von den gespiegelten, gespiegelten Dreiecken überdeckt wird, ist selbst ein Kreis. Der Nachweis hierfür ist leider nicht ganz so einfach zu führen und würde den Rahmen dieses Artikels sprengen. Interessanterweise führt eine wiederholte Spiegelung an *beliebigen* Kreisbogendreiecken mit Innenwinkelsumme kleiner 180° und lauter „guten“ Winkeln zu einer Kreisüberdeckung. Diese Eigenschaft beschränkt sich sogar nicht nur auf Dreiecke. Wir haben in Abschnitt 3 gesehen, dass man Kaleidoskope auch mit Vierecken bauen kann, solange nur die Winkel an den Ecken „gut“ sind. Der einzige solche Fall, den wir bisher kannten, war das Rechteck aus Bild 5. Mit Kreisbögen ist es sogar möglich, beliebige Vielecke zu bauen die an den Ecken nur „gute“ Winkel besitzen. Die Winkelsumme für derartige n -Ecke mit $n \geq 4$ wird dabei (bis auf das Rechteck) immer kleiner sein als die entsprechende Winkelsumme in einem geradlinig begrenzten n -Eck. So ist es zum Beispiel möglich, mit Kreisbögen ein Fünfeck zu konstruieren, das an jeder Ecke einen rechten Winkel hat. Mit einem solchen Fünfeck kann man durch fortgesetzte Kreisspiegelung an dessen Seiten die Kreisscheibe nahtlos und überlappungsfrei ausfüllen. Wie es Dr. Stickler in solch einem Spiegelkabinett geht, ist in Bild 22 dargestellt. Um jede Ecke eines Fünfecks ergeben sich genau vier Kopien Dr. Sticklers in vollkommener Analogie zu der Situation beim Rechteck. Die gespiegelten Kopien nähern sich, im Unterschied zum Rechteck, jedoch immer weiter dem Rand der Kreisscheibe an, erreichen diese aber nie. Ein Fünfeck mit ausschließlich rechten Winkeln ist jedoch nur ein Spezialfall. Man kann sogar jede Eckenwinkelverteilung im Fünfeck, die in der Summe kleiner als die in der euklidischen Ebene üblichen 540° ist, mit Kreisbögen realisieren. Wählt man zusätzlich alle Eckenwinkel identisch und als „gute“ Winkel, so gelangt man zu Parketierungen der Kreisscheibe, bei der man um jede Ecke eine beliebige (vorher fest gewählte) Anzahl von Fünfecken herumlegen kann. Es müssen nur mehr als drei sein. Jede dieser Parketierungen füllt eine Kreisscheibe flächendeckend, nahtlos und überlappungsfrei aus. Im Extremfall ist es sogar möglich, die Eckenwinkel alle zu 0° zu wählen. Die Eckpunkte des Fünfeckes liegen dann auf dem Rand der ausgefüllten Kreisscheibe, und an jeden dieser Eckpunkte stoßen unendlich viele Fünfecke an.

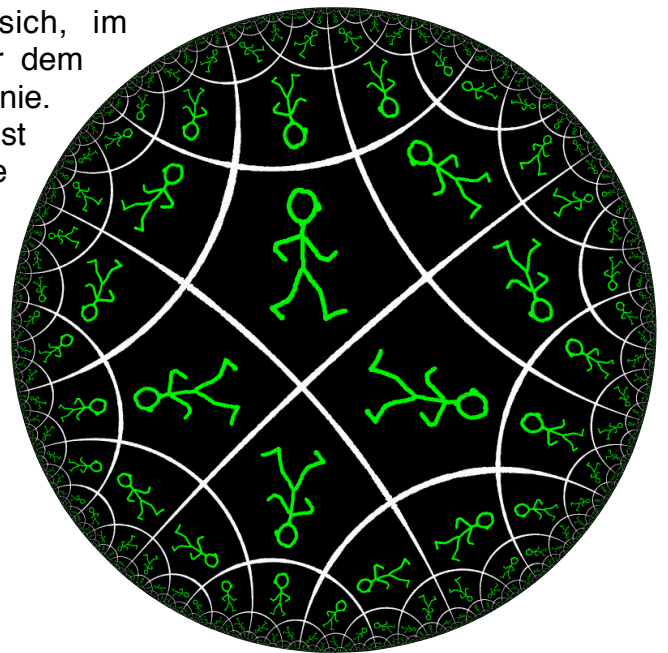


Bild 22. Dr. Stickler in gespiegelten Fünfecken

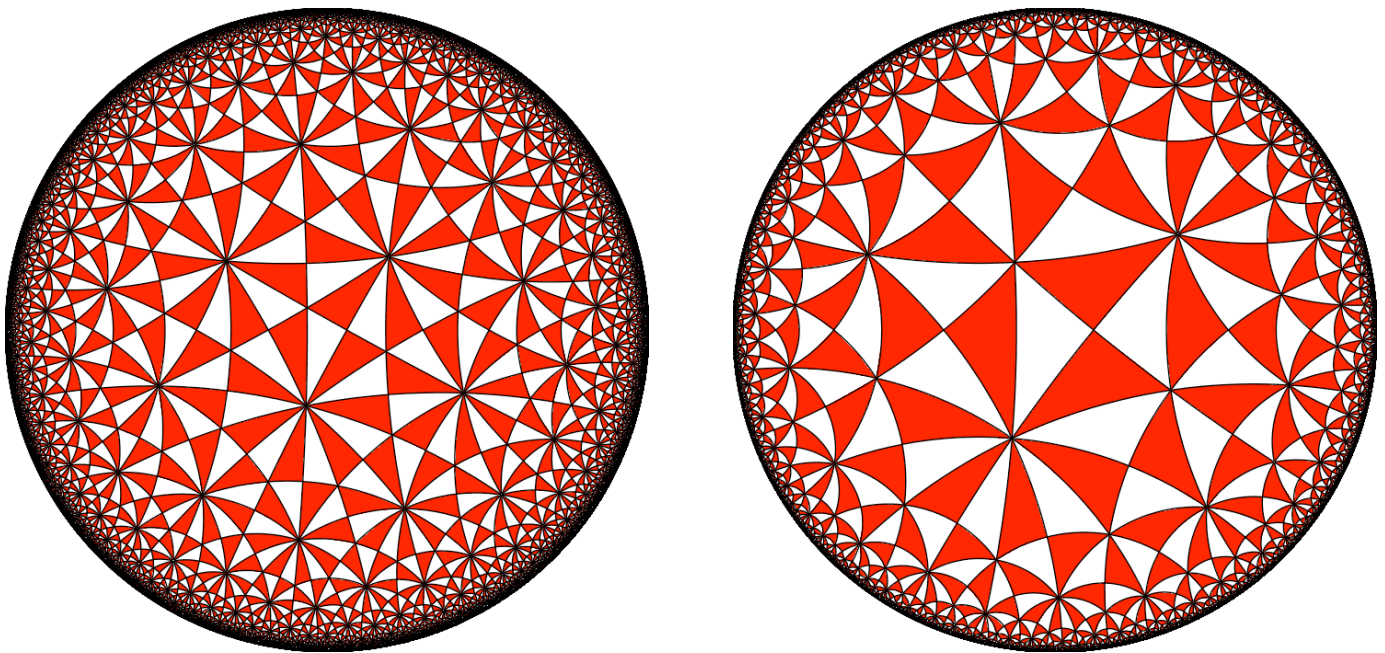


Bild 23. Die Fälle (2,3,7) und (2,4,6)

Wir wollen nun noch betrachten, welche Bedeutung unsere Eckenindizes bei Dreieckskaleidroskopen haben, bei denen die Winkelsumme, wie eben betrachtet, kleiner als 180° ist. Die Bedingung für die Indizes übersetzt sich hier zu $1/a + 1/b + 1/c < 1$. Man sieht leicht, dass es hierfür wieder unendlich viele Möglichkeiten gibt (man braucht nur die Zahlen a, b, c groß genug zu wählen). Jede dieser Möglichkeiten entspricht einem Dreieckskaleidroskop mit „guten“ Winkeln und Winkelsumme kleiner 180° . Jede dieser Möglichkeiten lässt sich nur noch durch Kreisspiegelungen realisieren und führt zu einer nahtlosen Parketierung eines Kreises. Unter diesen Möglichkeiten finden sich manche mathematische Perlen; z.B. die Kaleidroskope mit kleinsten Indizes (2, 3, 7) und (2, 4, 6) bei denen diese Effekte erstmalig auftreten.

12. Bis zur Unendlichkeit und noch viel weiter

Es ist Zeit inne zu halten und zurückzuschauen, welchen Effekten wir bisher auf unserem Spaziergang begegnet sind, und zu resümieren, was wir bisher geleistet haben. Wir wollen dies am übersichtlichen Fall der Dreieckskaleidroskope durchführen. Wir haben versucht einen Überblick zu bekommen, welche Dreiecke sich aus „guten“ Winkeln bilden lassen, da genau diese zu perfekten Kaleidroskopen führen. Wir haben dabei schnell gesehen, dass wir drei Fälle unterscheiden müssen.

Fall A: Winkelsumme = 180°	$1/a + 1/b + 1/c = 1$	(2,3,6), (2,4,4), (3,3,3)
Fall B: Winkelsumme $> 180^\circ$	$1/a + 1/b + 1/c > 1$	(2,2,a), (2,3,3), (2,3,4), (2,3,5)
Fall C: Winkelsumme $< 180^\circ$	$1/a + 1/b + 1/c < 1$	der ganze Rest

Fall A umfasste genau drei Kaleidroskope. Er entsprach den Situationen, bei denen wir eine nahtlose Überdeckung der Ebene mit identischen Dreiecken erhielten. Er ließ sich mit ebenen Spiegeln, die senkrecht auf einer Tischplatte stehen erzeugen. Fall B ließ sich ebenso mit ebenen Spiegeln realisieren. Diese mussten sich allerdings in einem Punkt treffen. Dies führte zu regelmäßigen Dreieckszerlegungen der Kugeloberfläche. Er umfasste die Fälle (2,3,3), (2,3,4), (2,3,5), die in sehr enger Verbindung zu den Platonischen Körpern standen, sowie die etwas langweilige unendliche Klasse (2,2,a). Fall C schließlich umfasste unendlich viele Möglichkeiten, ließ sich aber in keinem Fall mehr mit ebenen Spiegeln realisieren. Hier waren Kreisspiegelungen unumgänglich.

Es mag etwas unnatürlich erscheinen, für Fall C plötzlich Kreisspiegelungen zulassen zu müssen, die bei den anderen beiden Situationen nicht notwendig waren. Tatsächlich gibt es aber mathematische Formulierungen, in denen der Übergang zwischen den drei Fällen nur dem Verändern eines Parameters entspricht.

Normalerweise sind wir es gewöhnt, dass ein Spiegelbild die gleiche Größe wie das Originalbild hat. Dies ist eine Eigenschaft ebener Spiegel. Deswegen hatten all unsere Dreiecke, die in Fall A und Fall B aufgetreten sind, immer die gleiche Größe. Es liegt nahe, eine solche Größenerhaltung auch für Kreisspiegelungen zu fordern. Nun werden allerdings, wenn man sich z.B. Bild 24 anschaut, die Kopien der Dreiecke zum Rand der Kreisscheibe hin offensichtlich immer kleiner. Man kann sich hier mit einem mathematischen „Taschenspielertrick“ aus der Affäre ziehen. Man *definiert* einfach, dass die Fläche eines jeden Dreiecks gleich groß sein soll. Mathematiker nennen so etwas eine spezielle Maßbestimmung. Man kann sich dies folgendermaßen vorstellen: Stellen sie sich vor, sie seien Dr. Stickler und würden nichts anderes als das Innere der Kreisscheibe kennen. Ferner stellen sie sich vor, dass, wenn sie von der Mitte der Kreisscheibe zu deren Rand laufen, sich alle Gegenstände in der Kreisscheibe (Tische, Stühle, Leselampen,...) gemeinsam mit ihnen verkleinern und zwar genau in dem Maße wie es die Kaleidoskopdreiecke in Bild 24 andeuten. Da sich alles mit Ihnen verkleinert, fehlt Ihnen der äußere Bezugsrahmen und sie merken gar nicht, dass alles kleiner wird. Sie haben ja immer die passende Größe, um sich mit ihrem Stuhl an ihren Tisch zu setzen. Das heißt für sie selbst als Wesen, das in der Kreisscheibe lebt, wird ihr Weg zum Rand der Kreisscheibe unendlich lang erscheinen. Obwohl ein außenstehendes Wesen, das auf die Kreisscheibe von außen schauen kann, beobachten wird, dass sie in immer kleineren Schritten sich immer langsamer dem Kreisrand nähern.

Der Mathematiker nennt dies den Unterschied zwischen *innerer* und *äußerer* Geometrie einer Fläche. Dr. Stickler nimmt nur die innere Geometrie der Kreisscheibe wahr und für ihn ist der Weg zum Rand unendlich lang. Wir sehen von aussen in der äußeren Geometrie, wie Dr. Stickler immer langsamer wird. Das Resultat ist in beiden Fälle das gleiche. Dr. Stickler kommt niemals am Rand an. Könnte Dr. Stickler über den Rand der Kreisscheibe hinausgehen, so würde er sogar weiter als Unendlich gehen. Um es nochmals anders auszudrücken: Von Dr. Sticklers Perspektive aus sind alle Kopien seiner selbst in Bild 24 absolut gleich groß. Er stellt nur fest, dass sich bei Dreiecken geeigneten Ausmaßes Winkelsummen und Kaleidoskopeffekte ergeben, die er in unserer normalen euklidischen Geometrie noch nicht erlebt hat. Wäre Dr. Stickler in seiner Kreisscheibe selbst sehr, sehr klein (viel kleiner als in Bild 24

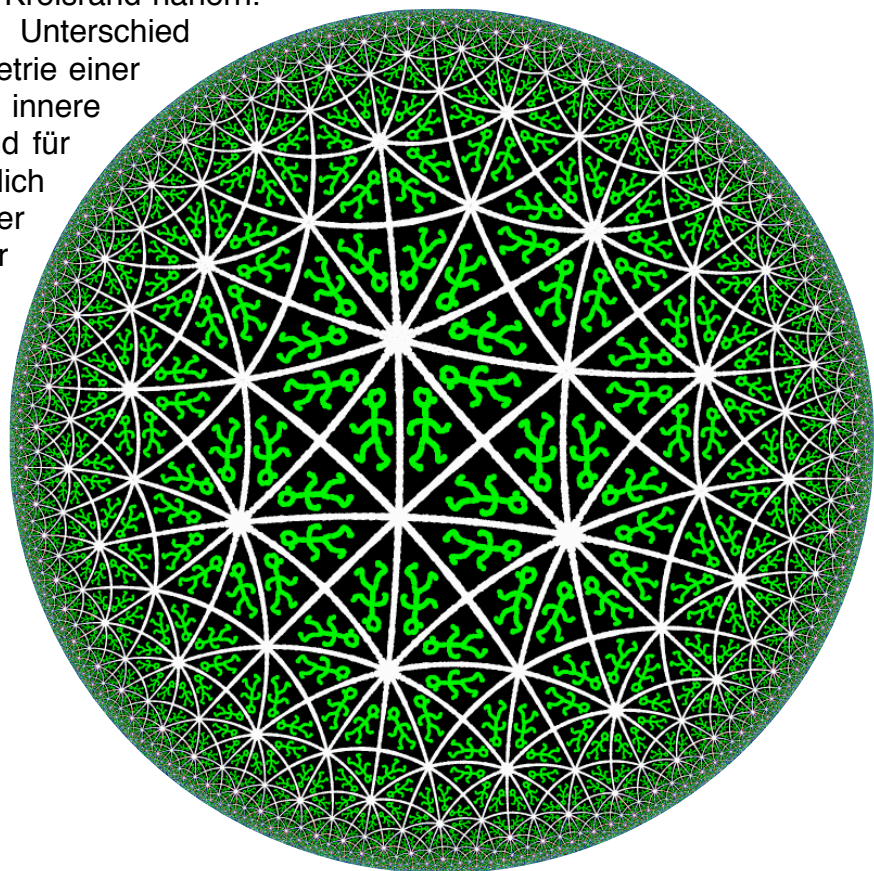


Bild 24. Dr. Stickler in einem (2, 4, 5) Kaleidoskop

dargestellt), so würde er eventuell den Unterschied zu einer normalen euklidischen Ebene gar nicht bemerken, bei sehr kleinen Dreiecken (nach Dr. Sticklers Maßstäben) wird nämlich die Winkelsumme sich recht genau an den für uns vertrauten Wert von 180° annähern. In der Tat würde Dr. Stickler im Kleinen noch nicht einmal merken, dass es sich bei den Kaleidoskopgrenzen um Kreisbögen und nicht um Geraden handelt. Ein Kreisbogen sieht ganz von der Nähe betrachtet nämlich immer fast aus wie ein Stück einer Geraden (die Erde selbst wurde ja auch lange Zeit für eine Scheibe gehalten).

Die drei von uns betrachteten Geometrien spielen in der Mathematik eine herausragende Rolle. Wir können sie dadurch unterscheiden, dass wir „einfach“ für ein Dreieck in unserer Umgebung die Eckenwinkel einer ganz genauen Messung unterziehen. Ist die Winkelsumme exakt gleich 180° , nennt man die Geometrie *euklidisch*. Ist die Winkelsumme größer als 180° , nennt man die Geometrie *elliptisch*. Ist sie kleiner als 180° , so nennt man die Geometrie *hyperbolisch*. Im ganz Kleinen ähneln sich diese drei Geometrien sehr. Auch auf der Kugeloberfläche haben sehr kleine Dreiecke eine Winkelsumme die nur ganz wenig größer als 180° ist. Je größer die Maßstäbe werden, desto deutlicher treten die Unterschiede zu Tage. Befindet man sich nicht in einer euklidischen Geometrie, so wird für große Dreiecke die Winkelsumme immer weiter von 180° abweichen. Von außen betrachtet, werden die Unterschiede besonders dramatisch, wenn wir Dr. Stickler auf eine unendlich lange Reise schicken. Dr. Stickler soll sich irgend eine Richtung aussuchen und in diese Richtung einfach losgehen. Dabei soll er versuchen immer gleich große Schritte zu machen. Befindet sich Dr. Stick in der normalen euklidischen Ebene, wird er dabei bezüglich unseres normalen Ebenenbegriffs eine unendlich lange Strecke zurücklegen. Befindet er sich in einer elliptischen Geometrie (also auf der Kugeloberfläche), so wird er bei seiner Reise irgendwann an den Punkt zurückkommen, an dem er gestartet ist. Befindet er sich in einer hyperbolischen Geometrie, so wird ihm seine Reise zwar auch unendlich lange vorkommen, er wird aber, wie schon gesagt, nicht aus der Kreisscheibe herauskommen.

Der große und bekannte Mathematiker Carl Friedrich Gauß, der einst den 10 DM Schein zierte, war einer der ersten Entdecker der hyperbolischen Geometrie (wenngleich er dies auch nicht öffentlich zugab, um keinen Ärger mit den philosophischen Lehren der Kant'schen Schule zu bekommen). Er stellte sich die berechtigte Frage, in welcher der Geometrien wir selbst eigentlich leben. Da er beruflich auch für die Durchführung von Landvermessungen verantwortlich war, gelang es ihm – aus durchaus persönlichem Interesse – in diesem Zusammenhang zwischen 1818 und 1827 bei der Vermessung des Königreichs Hannover das damals größte exakte Dreieck zu vermessen. (Zwischen dem Bergen Hoher Hagen, Brocken und Inselberg mit ca. 100km Seitenlänge). Im Rahmen seiner Messgenauigkeit gelang es Gauß allerdings, keine belegbare Abweichung von der Winkelsumme 180° festzustellen. Im Prinzip war Gauß seiner Zeit um einiges voraus. Hätte er Messungen im planetarischen Maßstab durchführen können, so hätte er tatsächlich kleine Abweichungen von 180° festgestellt. Tatsächlich treten im Weltraum lokale Schwankungen der so genannten *Raumkrümmung* auf. Das bedeutet, dass im Weltraum nicht überall ausschließlich die gleiche Geometrie vorherrscht. Lokal können also sehr große Dreiecke mit sowohl größerer als auch kleinerer Winkelsumme als 180° auftreten. Dieser Effekt der Krümmungsfluktuation wird durch das Vorhandensein von Massen verursacht und ist letztlich nur durch Einsteins *Allgemeine Relativitätstheorie* erklärbar. Im Vergleich zu den von uns betrachteten Geometrien schwankt die Geometrie des Raumes aber und wird von der lokalen Dichte der vorhandenen Materie beeinflusst. Ob, abgesehen von solchen lokalen Fluktuationen, unser Universum aber im großen Maßstab seiner gesamten Ausdehnung eher elliptisch, euklidisch oder hyperbolisch ist, ist nach wie vor noch eine ungeklärte Frage.

13. Lese und Surftips

Dieser Artikel greift viele verschiedene Themen auf, enthält viele Fotos und viele mit passender Software erstellte Bilder. Hier eine kleine Liste von Quellen, Lese- und Surftips.

Zunächst zur Literatur. Reflektionsgruppen, und nicht-euklidische Geometrien gehören zu wichtigen Themen in der Mathematik. Es gibt eine Unmenge von Literatur dazu auf verschiedenstem Niveau. Hier eine sehr kleine Auswahl:

H.S.M Coxeter, *Twelve Geometric Essays*, S. Illinois University Press, 1968

H.S.M. Coxeter, *Kaleidoscopes: Selected Writings*, Wiley, 1995

Roe Goodman, *Alice through looking glass after looking glass: The Mathematics of Mirrors and Kaleidoscopes*,
The American Mathematical Monthly 111, April 2004, 281--298

David Mumford, Caroline Series, und David Wright,
Indra's Pearls: The Vision of Felix Klein, Cambridge University Press 2002

D. Sweet, E. Ott, J.A. Yorke, *Complex topology in chaotic scattering: a laboratory observation*, Nature 399, 315 (1999)
(hieraus wurde mit freundlicher Genehmigung Bild 19 entnommen)

Nun zu Programmen und Bildern: Viele der Bilder wurden mit entsprechenden Computerprogrammen erzeugt einige davon sind in der vom Autor eingerichteten Mathematikausstellung ix-quadrat an der TU München zu sehen. Hier in diesem Zusammenhang einige Interessante Webseiten:

Homepage ix-quadrat, TU München

www-m10.ma.tum.de/ix-quadrat/

Material für Fotos in Bild 1, 4, 7, 9, 11, 13, 14

Programm von Martin von Gagern zum Zeichnen hyperbolischer Ornamente

martin.von-gagern.net/projects/HypOrna

verwendet in Bild 22, 23, 24

Programm *Cinderella* zum Erstellen geometrischer Zeichnungen

www.cinderella.de

verwendet in Bild 2, 3, 5, 6, 8, 9, 12, 16, 19, 20, 21

Programm *Povray* ein Raytracer zum erzeugen 3-dimensionaler Bilder

www.povray.org

verwendet in Bild 15, 17, 18

Weiterhin interessant

Programm von Martin von Gagern zum Zeichnen euklidischer Ornamente

home.in.tum.de/~gagern/ornament/ornament.html

Bilder und Programm von Don Hatch für Hyperbolische Parkettierungen

www.plunk.org/~hatch/HyperbolicTesselations

www.plunk.org/~hatch/HyperbolicApplet