Cinderella.2 – Geometrie und Physik im Dialog

Ulrich Kortenkamp
Pädagogische Hochschule Schwäbisch Gmünd, Oberbettringer Str. 200, 73525 Schwäbisch Gmünd

Jürgen Richter-Gebert
Technische Universität München, Garching
kortenkamp@cinderella.de
richter@cinderella.de

Zusammenfassung

Dynamische Geometriesysteme sind nicht nur für den Mathematikunterricht geeignet. Das DGS Cinderella bietet in seiner neuesten Version 2.0 auch einen Simulationsmodus, mit dem einfache physikalische Experimente durchgeführt werden können. Dabei kommt die Geometrie aber auch nicht zu kurz, wie wir in diesem Artikel darstellen.

Geometrie und Realität

Geometrie ist nicht nur ein spannender Teil der Mathematik, sondern war schon seit der Antike die Grundlage der Architektur. Vor über 200 Jahren erfand GASPARD MONGE die darstellende Geometrie, um dadurch eine mathematische Grundlage für den Bau von Festungsanlagen zu haben. Viele Rechen- und Darstellungsmethoden, wie zum Beispiel Homogene Koordinaten, die aus dem *Barycentrischen Calcul* von August Ferdinand Möbius [1] hervorgingen, sind heute unentbehrlich für CAD-Programme, ohne die wiederum die moderne Architektur nicht denkbar wäre. Daher dürfen diese Grundlagen im Architekturstudium nicht fehlen [2].

Das Geometrieprogramm Cinderella [3] ist seit Anbeginn darauf ausgelegt, eine saubere und stabile mathematische Grundlage für dynamische Geometrie zu liefern, die auch mit Ausnahmesituation wie „unendlich fernen Punkten“ oder (für die Schule) ungewöhnlichen mathematischen Modellen, zum Beispiel hyperbolischer Geometrie, umgehen kann. Dies alles dient aber nicht nur Mathematikern, sondern ist auch für den Schuleinsatz geeignet, wie zum Beispiel die mit Cinderella gestalteten Webseiten `http://www.geomouse.ch` zeigen.

Die neueste Version, Cinderella.2 [4], geht in vielen Aspekten über die ursprünglichen Ansätze heraus. Zum Einen sind diese Erweiterungen im klassischen Geometrieteil zu finden: So werden zum Beispiel Abbildungen nicht nur – wie gewohnt – dynamisch aktualisiert, sondern stehen als eigene Objekte zur Verfügung, die wiederum miteinander verknüpft werden können.

Wesentlich spannender sind allerdings die gänzlich neuen Teile *Simulationen (CindyLab)* und *Algorithmen (CindyScript)*. In diesem Artikel stellen wir nur eine kleine Anwendung des Simulationsteils vor, weitere Informationen zu den anderen Teilen finden sich auf der Cinderella-Homepage `http://cinderella.de`, und auch im (derzeit leider nur auf Englisch verfügbaren) Handbuch `http://doc.cinderella.de`.

Die Einführung eines Simulationsmoduls, mit dem physikalische Experimente durchgeführt werden können, ist Teil der Bestrebungen der Autoren, die in der Schule oft eher abstrakt oder (über eingekleidete Aufgaben) nur bedingt realitätsnah behandelte Geometrie wieder an echte Probleme heranzuführen. Das im folgende vorgeführte Experiment ist ein Beispiel dafür, dass man mit Geometrie-Software auch fächerübergreifend mehr als bisher erreichen kann.

Die Golden Gate Bridge

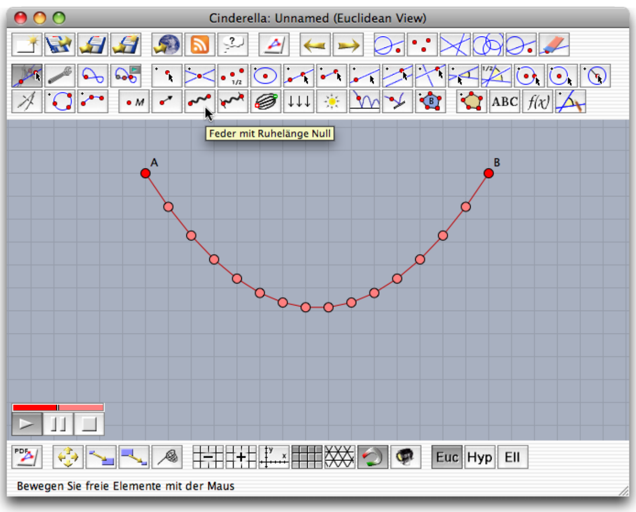
Ausgangspunkt unseres Geometrie-Experiments ist die Golden Gate Bridge in San Francisco. Als eine der längsten Hängebrücken der Welt gehört sie zu den bedeutendsten architektonischen Wahrzeichen der Vereinigten Staaten von Amerika.

Die Golden Gate Bridge. Fotografie: Aaron Logan, `http://www.lightmatter.net/gallery/albums.php`

Die Golden Gate Bridge überspannt den *Golden Gate*, die Verbindung zwischen der Bucht von San Francisco und dem Pazifik seit 1937. Sie ist eine Hängebrücke, das heißt, dass die eigentliche Brücke an Stahlseilen aufgehängt ist, die selbst an zwei monströsen Pfeilern (227m hoch!) befestigt sind. Die Stahlseile selbst haben einen Durchmesser von 92 cm – nicht gerade das, was man sich unter einem Seil vorstellt, aber notwendig, um das immense Gewicht von insgesamt 887 000 Tonnen zu halten.

Wir möchten nun diese Brücke untersuchen, und herausfinden, welchen Bogen die oberen Halteseile beschreiben, und warum dieser genau so aussieht, wie er aussieht.

Die Modellierung der Seile werden wir zunächst mit (virtuellen) Gummibändern durchführen; diese werden wie Federn proportional zu der auf sie wirkenden Kraft gedehnt, haben aber eine Ruhelänge von 0. Unser Ziel ist, die Gestaltung der Brücke so durchzuführen, dass sie nicht durch im Innern wirkende Kräfte zerrissen wird. Die Gummibänder zeigen uns mit ihrer Ausdehnung genau, welche Länge die Stahlseile später haben müssen, damit diese inneren Kräfte nicht auftreten. Man kann sich also vorstellen, dass die mit Gummibändern gefundene Form dann aus Metall nachgebaut wird. Dieses Gestaltungsprinzip findet sich in der Architektur immer wieder (siehe auch [5]). So werden zum Beispiel Dachkonstruktionen wie die von Frei Otto (Olympiastadion München!) im Modell meist durch Damenstrumpfhosen realisiert – eine Art zweidimensionales Gummiband!



Hängende Gewichte in Cinderella. Ein Video, das zeigt wie diese Konstruktion erstellt wurde, findet sich unter [7]

Physik-Simulationen in Cinderella

Wir starten nun Cinderella und schalten die Werkzeugleiste für Physiksimulationen ein (über „Datei/Toolbars auswählen“, und dann „CindyLab“). Zusätzlich zu den normalen geometrischen Werkzeugen werden nun auch Werkzeuge für Massepunkte, Federn, Wände und andere Simulationsobjekte freigeschaltet [6].

Als Vorübung zu der Untersuchung der Brücke erstellen wir zunächst eine einfache Simulation, die das Durchhängen einer Reihe von Gewichten demonstriert. Dazu fixieren wir zwei „normale“ Punkte A und B, und verbinden diese dann über eine Reihe von Gummibändern.

Wir können in der Simulation einfach solche Parameter wie Reibung und Schwerkraft einstellen. Die Reibung „beruhigt“ die Simulation und sorgt dafür, dass sie sich – im wahrsten Sinne des Wortes – einpendelt. Mit dem Schwerkraftregler können wir sehen, wie stark die Gewichte durchhängen. Spielen wir ein wenig mit dem Regler, so können wir in der obigen Simulation eine durchhängende Kurve herstellen, die stark der Kurve ähnelt, die das obere Halteseile der Golden Gate Bridge beschreibt. Es handelt sich hierbei um eine *Parabel*!

Warum eine Parabel?

Die meisten Mathematiker erwarten, dass die Gummibänder hier als Kurve eine Kettenlinie (Katenoide) beschreiben, also eine Funktion der Form

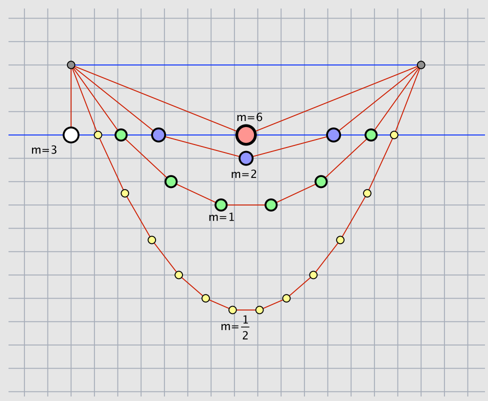
$$f(x) = a \cdot \cosh \frac{x - x_0}{a} + y_0 \qquad .$$

Wir können uns aber auch ohne viel Rechnen recht schnell klar machen, dass es sich um eine Parabel handeln muss. Betrachten wir eine Kette aus n Massepunkten gleicher Masse, die durch ideale masselose Federn mit Ruhelänge 0 verbunden sind und deren Enden an zwei gleich hohen Fixpunkten mit Nägeln befestigt sind. Die Schwerkraft wirkt senkrecht nach unten. Das Superpositionsprinzip gestattet uns die Situation in x- und y-Richtung getrennt zu betrachten.

In x-Richtung passiert nicht viel Spannendes: Da in diese Richtung keine Schwerkraft wirkt, pendeln sich einfach gleiche Abstände in x-Richtung zwischen den Punkten ein. Die x-Koordinaten unserer Punkte werden einfach um den immer gleichen Betrag größer (sagen wir, um 1, damit wir nicht so viel rechnen müssen).

Was passiert nun in y-Richtung? Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass wir es mit einer ungeraden Anzahl von Massen zu tun haben (andernfalls wird die Überlegung ein klein wenig komplizierter, ist aber im Prinzip die gleiche). Das Koordinatensystem verschieben wir so, dass der unterste Punkt der hängenden Kette im Koordinatenursprung liegt. Die Masse des untersten Massepunktes zieht an den beiden benachbarten Gummibändern und streckt diese in y-Richtung auf eine Länge l. An den links und rechts daran angrenzenden Gummibändern hängt das Gewicht der untersten drei Massen, also werden diese in y-Richtung auf $3l$ gedehnt. Es folgen Dehnungen von $5l$, $7l, \ldots$. Damit ergeben sich aber für die Höhen der Massepunkte ausgehend vom untersten Punkt der Reihe nach die Werte $1l$, $1l + 3l = 4l$, $1l + 3l + 5l = 9l$, $1l + 3l + 5l + 7l = 16l, \ldots$, – also liegen sie auf einer Parabel!

Das erkennt man auch gut in dem folgenden Bild, welches unter [8] auch animiert zur Verfügung steht:

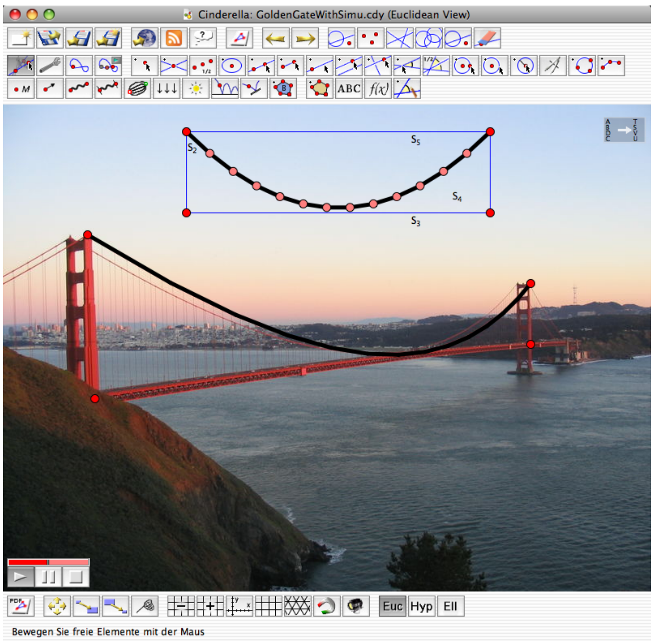


Die Mathematik, die hinter den Physik-Simulationen steckt, ist die Numerik partieller Differentialgleichungen. Mit dem *Runge-Kutta-Verfahren* löst Cinderella die Differentialgleichungen, die die Kräfteverhältnisse für den jeweiligen Versuchsaufbau beschreiben, und zeigt die Ergebnisse direkt animiert an.

Die Brücke ist zu lang!

Jetzt könnten wir schon fast überprüfen, ob die Golden Gate Bridge nach den Prinzipien gestaltet wurde, die wir zuvor in der Theorie erarbeitet haben. Eine rasche Bildersuche über Flickr[1], Google oder Wikipedia Commons[2] liefert schnell viele Ansichten der Brücke, doch auf keiner ist die Brücke verzerrungsfrei von vorn dargestellt. Wir können also die Parabel aus dem Versuch nicht direkt auf die Brücke übertragen.

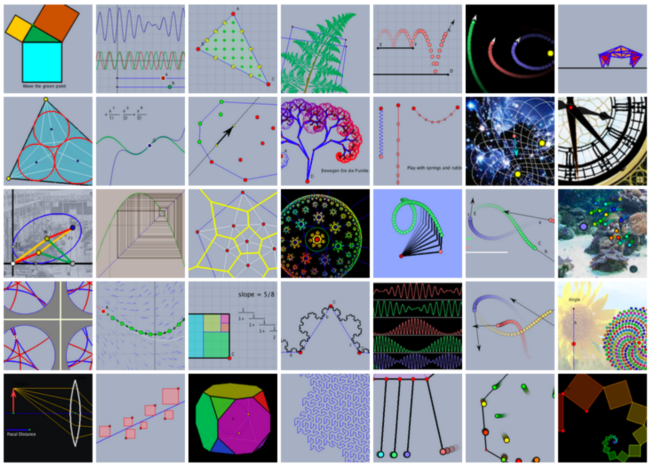
Jetzt kommt *wieder* die Geometrie in das Spiel: Wir definieren in Cinderella eine Projektive Transformation – das sind die Abbildungen, die man erhält, wenn man ein Foto auf eine Wand projiziert – von den vier Ecken der Simulation auf die Spitzen und Basen der Brückenpfeiler. Diese Projektion (im Bildschirmfoto rechts oben zu sehen) wenden wir auf die Gummibänder an und erhalten als Resultat den Verlauf der „Hängeparabel“ im Foto, als hätten wir die Gewichte tatsächlich an die echte Brücke gehängt.



Unter [9] kann man diese Simulation selbst ausprobieren, das „making of“ ist im Video unter [10] zu sehen.

Lässt man die Fantasie ein wenig spielen, so fallen einem noch viele weitere spannende und fächerübergreifende Beispiele ein, die die Physiksimulation ausnutzen. Kombiniert man das ganze noch mit der eingebauten Sprache CindyScript, so ergeben sich noch mehr Möglichkeiten.

Eine Beispielsammlung, die von Gestängemechanismen und Optik über Planetensimulation bis hin zur Simulation von Fischschwärmen geht, findet man auf der Homepage von Cinderella:



Die Version 1.4 von Cinderella, unter anderem ausgezeichnet mit dem EASA 2002 und dem Deutschen Bildungssoftwarepreis digita2001 gibt es als kostenlosen Download unter `http://cinderella.de`. Die neue Version 2.0 mit Physiksimulationen und vielen weiteren Funktionen gibt es ebenfalls unter dieser Adresse.

Literatur und Links

[1] August Ferdinand Möbius (1827): *Der barycentrische Calcul*. Originalausgabe: Verlag von Johann Ambrosius Barth, Leipzig. Nachdruch: Georg Olms, 1976.

[2] Helmut Pottmann, Andreas Asperl, Michael Hofer und Axel Kilian (2007): *Architectural Geometry*. Bentley Institute Press.

[3] Richter-Gebert, Jürgen & Ulrich H. Kortenkamp (1999): The Interactive Geometry Software Cinderella. Heidelberg: Springer-Verlag.

[4] Richter-Gebert, Jürgen & Ulrich Kortenkamp (2006): *Math in Motion – The Interactive Geometry Software Cinderella*. Version 2.0. `http://cinderella.de`

[5] Martin Schuster (1997): *Seminararbeit Designgeschichte: Frei Otto*. (Technische Grundlagen) `http://www.aspekt1.net/ms/fo_ref/tgrundl.html`

[6] Ulrich Kortenkamp (2008): *Erste Schritte mit Physiksimulationen in Cinderella.2*. YouTube Video: `http://youtube.com/watch?v=2nrpP1PeKyI`

[7] Ulrich Kortenkamp (2008): *Hängende Gewichte in Cinderella.2*. YouTube Video: `http://youtube.com/watch?v=2nrpP1PeKyI`

[8] Ulrich Kortenkamp (2008): *Cinderella Blog: Hängende Parabel*. Cinderella-Konstruktion unter `http://blog.cinderella.de/archives/206-Haengende-Parabel.html`

[9] Ulrich Kortenkamp (2008): *Cinderella Blog: Golden Gate Simulation*. Cinderella-Konstruktion unter `http://blog.cinderella.de/archives/210-Golden-Gate-Simulation.html`

[10] Ulrich Kortenkamp (2008): *Golden Gate Bridge Simulation mit Cinderella.2*. YouTube Video: `http://youtube.com/watch?v=xHY6G2fTLPg`

[1] `http://flickr.com`

[2] Das hier verwendete Bild ist aus der Wikipedia Commons, aufgenommen von Dirk Beyer und unter der Creative Commons Share-alike-Lizenz (cc-by-sa-2.5) lizensiert.