Der Reiz des Haptischen – Modelle und ihre vielfältigen Aufgaben

Jürgen Richter-Gebert
Technische Universität München

> Ein Modell ist ein beschränktes Abbild der Wirklichkeit. Nach *Herbert Stachowiak* (Allgemeine Modelltheorie, 1973, S. 131-133) ist es durch mindestens drei Merkmale gekennzeichnet:
>
> 1. Abbildung - Ein Modell ist stets ein Modell von etwas, nämlich Abbildung, Repräsentation natürlicher oder eines künstlichen Originals, das selbst wieder Modell sein kann.
> 2. Verkürzung - Ein Modell erfasst im Allgemeinen nicht alle Attribute des Originals, sondern nur diejenigen, die dem Modellschaffer bzw. Modellnutzer relevant erscheinen.
> 3. Pragmatismus - Modelle sind ihren Originalen nicht per se eindeutig zugeordnet. Sie erfüllen ihre Ersetzungsfunktion a) für bestimmte Subjekte (*Für Wen?*), b) innerhalb bestimmter Zeitintervalle (*Wann?*) und c) unter Einschränkung auf bestimmte gedankliche oder tätliche Operationen (*Wozu?*).
>
> *Wikipedia.de (Artikel Modelle, März 2012)*

Als Kind habe ich mir oft die Frage gestellt, ob es so etwas wie eine perfekt glatte Fläche geben könne. Einen Legostein in der Hand habe ich mir vorgestellt, wie dessen Seitenfläche wohl unter einem ganz unheimlich guten Mikroskop aussähe. Irgendwo bei ganz starker Vergrößerung würde er wohl kleine Unebenenheiten aufweisen. Aber diese Unebenheiten selbst könnten doch wieder ganz glatte Seitenflächen haben. Aber haben die nicht auch wieder kleine Erhebungen? Weder von Fraktalen noch von Heisenberg'scher Unschärferelation hatte ich damals (ich muss wohl 10 oder 11 gewesen sein) auch nur die geringste Ahnung. Im Prinzip habe ich etwas versucht, was mir aus heutiger Sicht wie das Zusammenbringen zweier vollkommen unterschiedlicher Welten erscheint. Einerseits hatte ich eine gewisse fast platonische Vorstellung von einer idealen und perfekt glatten Fläche. Andererseits habe ich versucht diese Vorstellung mit der realen Alltagswelt des Legosteines in Verbindung zu bringen, der natürlich mit all seinen Unzulänglichkeiten dem Ideal nicht gerecht werden konnte. Aus heutiger Sicht würde ich wohl sagen, dass die Seitenfläche des Legosteines eine Art Modell, ein nur in gewissen Grenzen zutreffendes Abbild einer ebenen Fläche darstellt. Dennoch ist die Seitenfläche sehr gut geeignet, zumindest ein vages Abbild meiner Vorstellung einer perfekt glatten Fläche zu vermitteln.

Dieser Artikel befasst sich genau mit solchen Versuchen, ideale Objekte, die einer mathematischen Abstraktion entspringen, durch Gegenstände und Effekte unserer Alltagswelt abzubilden. Die hier diskutierten Beispiele entstammen durchweg der Alltagspraxis der Mathematikvermittlung und haben ihren Ursprung in Exponaten der Münchner Mathematikausstellung *ix-quadrat*, Installationen im *Deutschen Museum* in München, dem *Museum für Mathematik und Mineralien* in Oberwolfach, sowie dem Portal für interaktive Mathematik *Mathe-Vital*.

Ein Modell ist stets ein Modell von etwas....

Nehmen wir dieses Fragment aus dem einleitenden Zitat wörtlich, so sollte man sich im Fall mathematischer Modelle zunächst einmal fragen, was durch solche Modelle eigentlich abgebildet werden soll. Mathematik beschäftigt sich mit abstrakten Objekten und deren Zusammenhängen, und letztlich sind mathematische Modelle Abbilder solcher abstrakter Phänomene. Ideale Punkte gibt es in unserer Alltagswelt ebenso wenig wie ideale Ebenen, ideale Symmetrien, ideale algebraische Flächen, etc. Sie existieren lediglich als formale Objekte und als Gebilde in unserer Vorstellungskraft. Diese inneren Vorstellungen sind aber von Person zu Person verschieden, sie formen sich durch Erfahrung und sind nicht selten abhängig von persönlichen intellektuellen Entwicklungen. Modelle können so auch zum Kommunikationsmedium für eine bestimmte Art der inneren Wahrnehmung werden. Sie erfüllen somit in der Mathematik mindestens zwei verschiedene Funktionen: Sie transportieren abstrakte platonische bzw. formale Ideen. Sie geben aber auch einen Einblick in die spezielle Betrachtungsweise des Erschaffers eines Modells. Im Folgenden soll an einigen Fallbeispielen das Wechselspiel zwischen abstrakter Idee, Modellerschaffer, Modellbetrachter, Material und Prozess der Fertigung beleuchtet werden.

Alles in der Welt ist merkwürdig und wunderbar für ein paar wohlgeöffnete Augen.

Ortega y Gasset

Sehen Lernen

Die abstrakte Idee hinter einem mathematischen Modell muss nicht immer offensichtlich sein. Genau wie beim Hören eines Musikstücks kann sich der ästhetische und intellektuelle Reiz eines Modells oftmals erst erschließen, wenn Hintergründe der Intention zugänglich gemacht werden. Als Beispiel hierfür soll ein klassisches Modell dienen, das beim erstmaligen Betrachten häufig mit dem Worten „Was für ein schöner Stern!“ kommentiert wird. Es handelt sich um einen so genannten *Kepler-Poinsot-Stern*, der in vielen mathematischen Modellsammlungen zu finden ist (Abb. 1). Auf den ersten Blick fallen insgesamt 12 Spitzen auf, bei denen jeweils fünf Flächen zusammenlaufen. Auffallend ist auch die hohe Symmetrie dieses Körpers. Diese soll später nochmals Thema sein. Die zwölf Spitzen können als auf die Seitenflächen eines Dodekaeders geklebte Fünfeckspyramiden angesehen werden und nicht selten wird dieses Modell auch genau so gefertigt. Der tiefere mathematische Sinn erschließt sich allerdings erst, wenn man sich dieses Modell auf gänzlich andere Weise entstanden vorstellt. Unter dem passenden mathematischen Blickwinkel betrachtet, zeigt sich dieser Stern als sehr naher Verwand-

Abb. 1: Kepler-Poinsot-Stern aus der Modellsammlung der TU München

ter des erlesenen und prominenten Clubs der *Platonischen Körper*. Um dies zu verstehen, ist ein kleiner Exkurs notwendig. Platonische Körper lassen sich folgendermaßen definieren:

Platonischer Körper:
Ein dreidimensionaler Körper, dessen Oberfläche aus lauter regelmäßigen n-Ecken des gleichen Typs aufgebaut ist. Diese sollen in Paaren Seite an Seite zusammentreffen. Ferner sollen alle Ecken des Körpers vollkommen identisch aussehen.

Diese unscheinbare Definition bedingt automatisch, dass es in der Klasse der Platonischen Körper nur fünf prinzipiell verschiedene Objekte geben kann: Das Tetraeder, das Oktader, der Würfel, das Ikosaeder und das Dodekaeder. Der Beweis dazu ist gar nicht so schwierig, und Pla-

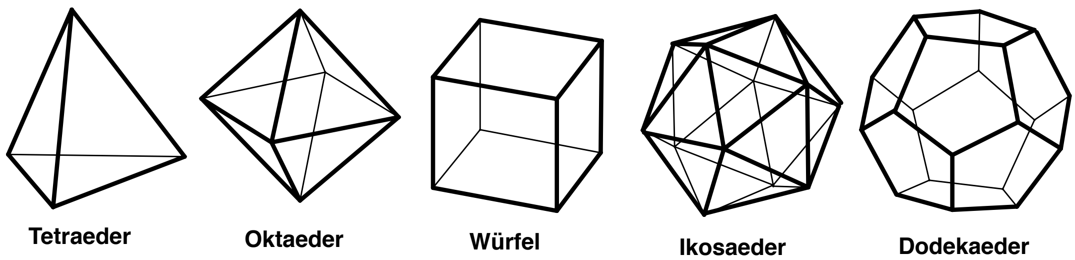

Abb. 2: Die fünf platonischen Körper

tonische Körper (Abb. 2) zählen zu den fundamentalen Objekten der Mathematik. Sie waren bereits im antiken Griechenland bekannt (in Euklids Elementen findet sich ein einfacher Beweis, dass es nur fünf platonische Körper gibt) und haben eine bewegte, auch außermathematische Geschichte. In der obigen Definition steckt ein Bauprinzip für platonische Körper. Man starte mit genügend vielen identischen regulären n-Ecken (z.B. genügend viele Dreiecke). Danach entscheidet man sich für eine nicht zu große Zahl (z.B. fünf). Dann formt man eine räumliche Ecke, an der fünf Dreiecke zusammen kommen. An den noch freien Ecken der Dreiecke verfährt man analog und bildet wiederum Ecken aus fünf Dreiecken. Beim Weiterbauen wird sich der Körper irgendwann (in diesem Fall nach Einbau von 20 Dreiecken) schließen und man erhält einen Platonischen Körper: das *Ikosaeder*. Analog ergibt sich das Tetraeder, wenn an jeder Ecke drei Dreiecke zusammen kommen und das Oktaeder bei vieren. Der Würfel ergibt sich bei drei Quadraten pro Ecke und das Dodekaeder bei drei regulären Fünfecken.

Wir wollen uns nun die Definition ein wenig genauer ansehen. Sie lässt offensichtlich sofortigen Spielraum für einige schöne Verallgemeinerungen: Was z.B. ist ein vier-dimensionaler Platonischer Körper? Dies führt zu sehr spannenden Objekten, bei denen die Seitenflächen wiederum aus platonischen Körper bestehen. Was passiert, wenn man mehrere Arten von Seitenflächen zulässt? Dies führt zur Theorie der Archimedischen Körper, von denen es 13 Stück gibt. Was passiert, wenn die Seiten nicht mehr reguläre Flächen sind? etc. Unser Kepler-Poinsot-Stern entstammt nun auch einer Verallgemeinerung der obigen Definition - um genauer zu sein: einer anderen Lesart dieser Definition. Wir wollen uns hierzu den Körper nicht mehr als massiv vorstellen, sondern uns allein auf seine Oberfläche beschränken. Wir betrachten also Flächen die aus identischen n-Ecken aufgebaut sind und bei denen jede Ecke gleich aussieht. Die Oberflächen Platonischer Körper erfüllen diese Bedingung aber es gibt noch einige weitere solche Objekte. Beispielsweise ist es möglich, dass sich solche Flächen unendlich weit erstrecken. Reguläre Parkette aus Quadraten, Dreiecken oder Sechsecken erfüllen diese Bedingungen. Tatsächlich gibt es sogar unendlich große räumliche Gebilde aus lauter Quadraten, bei denen an jeder Ecke *sechs* Quadrate zusammen stoßen (man findet Ausschnitte dieses unendlich großen Objektes davon in so mancher mathematischen Modellsammlung).

Wir wollen nun untersuchen, was passiert, wenn man die *Selbstdurchdringungsfreiheit* einer solchen Fläche und sogar die der Seitenflächen aufgibt. Hierzu zunächst zur Frage: *Was ist ein reguläres n-Eck?* Das ist ein Streckenzug aus n Kanten, die alle gleich lang sind und bei denen der Winkel an jeder Ecke gleich groß ist. Am Textrand in Abbildung 3 einige Beispiele. Das letzte Beispiel sollte einem zu denken geben. Alle Kanten sind gleich lang. Der Eckenwinkel beträgt jedoch an jeder Ecke nur 36°, was dazu führt, dass sich das Polygon selbst durchdringt und einen Stern bildet. In gewissem Sinn ist auch dieser Stern ein perfektes reguläres 5-Eck, ein selbstdurchdringendes eben. Aus solchen 5-Eck-Sternen kann man nun auch wieder räumliche Körper bauen, die sich ebenso selbst durchdringen. Man kann z.B. fünf solcher Sterne an einer Ecke zusammen kleben und analog zu unserer Bauvorschrift für Platonische Körper verfahren. An jeder noch freien Ecke werden wieder fünf 5-Eck-Sterne angeklebt, so lange bis sich das ganze schließt. In der Tat schließt sich das Gebilde nach 12 solcher „Seitenflächen“ perfekt und was herauskommt ist der *Kepler-Poinsot-Stern,* von dem zu Beginn des Abschnitts die Rede war. In einem sehr präzisen Sinne ist dieser Stern also ein sich selbst durchdringender Platonischer Körper, der aus lauter regelmäßigen 5-Eck-Sternen aufgebaut ist. Die etwas durchscheinende Computergraphik in Abbildung 4 lässt die sich durchdringenden Sterne ein wenig deutlicher hervor treten. Die eigentliche Idee dieses speziellen Modells kann in gewissem Sinne erst durch ein rudimentäres Verständnis der dahinter liegenden mathematischen Zusammenhänge erfasst werden. Augenöffner sind notwendig!

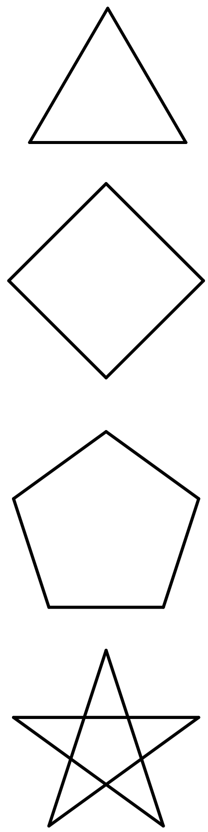

Abb. 3: Einige reguläre n-Ecke

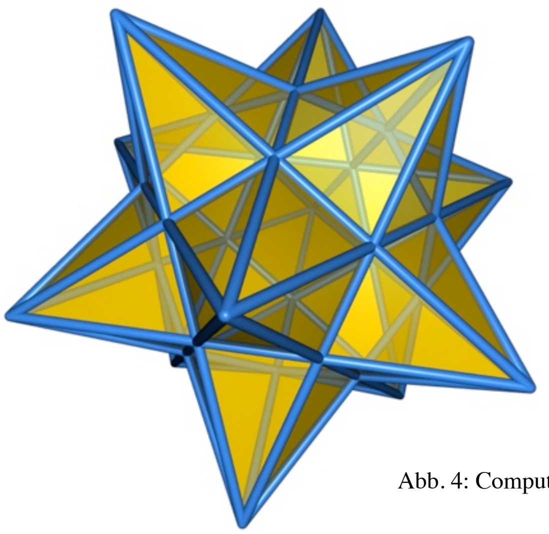

Abb. 4: Computererzeugte Darstellung eines Kepler-Poinsot-Sterns

Das *ix-quadrat* in Garching

Die am Campus Garching der TU München eingerichtete Mathematik-Ausstellung *ix-quadrat* hat sich zum Ziel gesetzt, spielerisch Zugänge zur Mathematik zu schaffen, ohne dabei die strukturellen Zusammenhänge unnötig zu vereinfachen. Ein wichtiges konzeptionelles Element des *ix-quadrat* ist es, dass in der Regel jeder Ausstellungsbesuch mit einer Führung verbunden ist, die im Sinne des letzten Kapitels als Augenöffner dient und den Blick für interessante Zusammenhänge schärft. Ein großer Teil der Ausstellung widmet sich dem Thema Symmetrie. Angefangen bei einfachen Spiegeln, über Klappspiegel und Kaleidoskope bis hin zu interaktiven Computerinstallationen wird bei einer Führung Schritt für Schritt ein Begriffsgeflecht aufgebaut, in dem verschiedene Facetten von Symmetrie zueinander in Beziehung treten. Platonische Körper und deren Symmetriegruppen nehmen im *ix-quadrat* eine zentrale Rolle ein. Neben vielen hands-on Experimenten werden auch einige klassische Modelle des 19ten Jahrhunderts aus dem Universitätsbestand gezeigt. Bei sehr interessierten Gruppen kann es vorkommen, dass im Verlauf der Führung genügend Hintergründe erklärt werden, um den Kepler-Poinsot-Stern richtig schätzen zu lernen. Ziel ist es dennoch, individuell genau so viel Begriffe zu vermitteln, dass die Zuhörer weder gelangweilt noch überfordert sind. In der Tat gelingt dies trotz eines recht heterogenen Besucherstroms von Kindergärten bis zu Austauschstudenten und Gastwissenschaftlern. Derzeit besuchen das *ix-quadrat* rund 300 geführte Gruppen pro Jahr.

Abb. 5: Besuchergruppe im *ix-quadrat*


Abb. 6: Blick in ein Kaleidoskop

Es gibt nichts Gutes außer man tut es.

Erich Kästner

Modelle Bauen

Bleiben wir beim Kepler-Poinsot-Stern. Dieser hat tatsächlich einige überraschende Eigenschaften, die ihn gerade auch für den Einsatz in Modellbau-Workshops zu einem sehr spannenden Objekt machen. Er lässt sich nämlich als eine so genannte Tensegrity Struktur realisieren.

Tensegrity Struktur:
Eine geometrische Struktur oftmals bestehend aus Stangen und Gummibändern, die allein durch ihre innere Spannung in einer dreidimensional räumliche Form gehalten wird. Der Begriff geht ursprünglich auf den Systemtheoretiker, Architekten und Designer Buckminster Fuller zurück, der solche und verwandte Strukturen auch für den Bau von selbsttragenden Leichtbauhallen eingesetzt hat.

Abb. 7: Fünf Pfeifenreiniger können so zu einem Stern verschränkt werden, dass eine Struktur entsteht die durch die eigenen Spannungskräfte in Form gehalten werden.

Die Beobachtung, dass sich der Kepler-Poinsot-Stern als Tensegrity artige Struktur bauen lässt, kam eher zufällig beim kreativen Spiel mit Pfeifenreinigern. Jeder, der sich mit mathematischem Modellbau auseinandersetzt, ist auch ständig auf der Suche nach geeigneten Materialien, mit denen sich bestimmte Gedanken möglichst gut umsetzten lassen. Handelsübliche Pfeifenreiniger sind hierbei lohnenswerte Objekte. Die wollige Außenhaut sorgt für Reibung, der Drahtkern kann für den Aufbau von Spannung verwendet werden. Eine nahe liegende Frage ist es zu studieren, in welcher Form sich Pfeifenreiniger verweben lassen, so dass eine Struktur entsteht, die allein durch ihre innere Spannkraft in Form gehalten wird. Die einfachste Möglichkeit kommt dabei mit nur vier Pfeifenreinigern aus. Die zweiteinfachste Möglichkeit benötigt fünf Pfeifenreiniger, die in Form eines 5-Eck-Sterns miteinander verwoben werden. Entlang jedes Pfeifenreinigers bilden die restlichen vier ein auf-ab-auf-ab-Muster. Das entstehende Gebilde wird allein durch die Spannungs- und Reibungskräfte in Form gehalten. Wenn sich ein 5-Eck-Stern aus Pfeifenreinigern bauen lässt, so liegt es nahe, 12 solcher Sterne zu einem Kepler-Poinsot-Stern zusammen zu fügen. Dies ist nicht ganz einfach und erfordert ein wenig Übung, kann aber innerhalb eines angeleiteten Workshops vermittelt werden. Da die Fünfecke sich an jeweils einer Kante treffen, kommt man mit insgesamt $(12 \cdot 5)/2=30$ Pfeifenreinigern aus. Es entsteht das Gerüst eines Kepler-Poinsot-Sternes, das alleine aus den inneren Spannungskräften der Pfeifenreiniger und der Reibung gehalten wird. Zusätzliches Verhaken oder Verkleben ist nicht notwendig. Ein auf diese Art realisierter Kepler-Poinsot-Stern verkörpert in einem Modell gleich

Abb. 8: Bastelworkshop im *ix-quadrat*

eine ganze Reihe von mathematischen Ideen: Er hat eine sehr große Symmetrie, er ist Verallgemeinerung der Idee Platonischer Körper, er vermittelt, dass räumliche Gebilde allein durch Spannungskräfte in Form gehalten können, und er regt zu Modifikationen, Nachbauten und Verallgemeinerungen der verschiedensten Art an. Auf eine besondere Art, dieses Bauprinzip einzusetzen, soll im folgenden Eingegangen werden.

Mathematische Großbaustellen

Wie heute [~1925], so war auch damals [1840-1880] der Zweck des Modelles nicht die Schwäche der Anschauung auszugleichen, sondern eine lebendige deutliche Anschauung zu entwickeln, ein Ziel, das vor allem durch das selbst Anfertigen von Modellen am Besten erreicht wurde.

Felix Klein, Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert

In der Skalierung eines Modells liegt oftmals ein besonderer Reiz. Ein bestimmtes mathematisches Modell besonders klein oder besonders groß zu fertigen, erfordert oftmals ein noch tieferes Durchdringen der dahinter liegenden strukturellen Zusammenhänge. Während beim Anfertigen eines Kepler-Poinsot-Sternes aus Pfeifenreinigern eine ganzheitliche Wahrnehmung überwiegt, ist die Fertigung des gleichen Objektes aus zwei Meter langen Bambusstäben eine Herausforderung, bei der jedes Detail durchdacht sein sollte. Anders als beim kleinen Modell ist es nämlich in der Regel nicht mehr möglich, die Struktur zu jeder Zeit als Ganzes zu überblicken. Vielmehr muss man sich beim Bau des Modells struktureller Hilfen bedienen, die sicher stellen, dass das Modell in sich konsistent gefertigt ist. Oftmals sind beim Bau von mathematischen Großmodellen mehrere Personen beteiligt, die rollenteilig den globalen Überblick und das lokale Ausführen übernehmen. Die Erfahrung in verschiedenen Modellbauworkshops hat gezeigt, dass gerade die Anfertigung extremer Objekte eine Kommunikation über die zu Grunde liegende Mathematik notwendig macht. Nicht selten wird spontan eine eigene mathematische Fachsprache zur Be-

Abb. 9: Kepler-Poinsot-Stern aus Bambus

wältigung der Aufgabe entwickelt. Anlässlich des Jahres der Mathematik 2008 wurden im Umfeld des *ix-quadrat* in Garching mehrere derartige Workshops zum Anfertigen von Großmodellen durchgeführt (es nahmen bis zu 250 Schüler teil). Unter anderem entstanden sehr symmetrische polyedrische Kugeln mit bis zu 6 Metern Durchmesser oder ein Turm aus ineinander verschachtelten Tetraedern von 11 Metern Höhe. Eine grundlegende Voraussetzung zum Gelingen der Projekte war es, dass genügend viele der beteiligten Personen eine klare Vorstellung von Ziel und der Struktur des jeweiligen Projektes hatten. Oftmals wurden zunächst kleine Modelle entworfen, an denen auftretende Schwierigkeiten vorab untersucht und die Struktur verstanden werden konnte. Trotz der fehlenden Perfektion der verwendeten Materialien, den naturgegebenen Mängeln und Ungenauigkeiten in der Ausführung sind solche Großmodelle immer noch in der Lage, die Essenz einer mathematischen Idee zu transportieren. Im konkreten Fall der Garchinger Bambusmodelle verblieben die Modelle rund eineinhalb Jahre am Campus und boten immer wieder Anlass zu interessanten mathematischen Gesprächen.

Abb. 10: Bambus Workshop MatheAktiv in Garching 2008

Virtualisierung: Wenn die reale Welt nicht ausreicht

The world is not enough.

007 Filmtitel

Eine der Ausgangsthesen dieses Artikels ist, dass ein mathematisches Modell letztlich ein Modell einer abstrakten Struktur, also eines platonischen Idealbildes eines mathematischen Zusammenhanges ist. Es ist eine besondere Herausforderung Materialien zu finden, die solche Ideen transportieren können. Oftmals stößt man aber beim Versuch der Verkörperung einer Idee auch an die Grenzen der Darstellung durch *reale* Objekte. Dies soll im folgenden am Beispiel von Symmetriegruppen verdeutlicht werden.

Symmetriegruppe:
Nach Hermann Weyl ist ein Objekt dann symmetrisch, wenn man es irgendwie verändern kann und nach dieser Operation ein vom ursprünglichen Objekt nicht unterscheidbares erhält. Eine Symmetriegruppe ist die Menge aller Symmetrieoperationen, die ein Objekt zulässt.

Betrachtet man beispielsweise ein Quadrat, so kommt dies nach einer Rotation um 90° wieder perfekt mit sich zur Deckung. Eine 90° Drehung ist also eine Symmetrieoperation des Quadrates. Ebenso ist z.B. die Spiegelung entlang einer Diagonalen eine Symmetrieoperation des Quadrates. Verkettung von Symmetrien ergibt wiederum eine Symmetrie. Die identische Operation, die das Quadrat einfach liegen lässt, eingerechnet, hat das Quadrat genau 8 Symmetrieoperationen. Diese bilden die Symmetriegruppe des Quadrates.

Abb. 11: Blick in ein (90°,45°,45°) Kaleidoskop

Die Verkettung von Symmetrieoperationen kann recht eindrucksvoll durch geeignete Anordnungen von Spiegeln demonstriert werden. Ein typisches Beispiel hierfür sind Kaleidoskope, bei denen drei Spiegel derart angeordnet sind, dass eine unendliche Zahl von Kopien eines Objektes entsteht. Abbildung 11 zeigt beispielsweise eine Fotographie eines dreieckigen Kaleidoskops mit Kantenwinkeln (90°, 45°,45°). In gewissem Sinn hat das entstehende Bild eine *motivische Komponente* (was wird gespiegelt) und eine *strukturelle Komponente* (wie wird es gespiegelt). Das entstehende Parkettmuster ist ein Objekt, welches sogar unendlich viele Symmetrien aufweist, da jede Spiegelachse selbst wieder in unendlich vielen gespiegelten Kopien vorliegt. Die von einem Kaleidoskop erzeugte Symmetriegruppe nennt man eine *Reflektionsgruppe*, da sie durch alleinige Verkettung von Spiegeloperationen erzeugt werden kann. Auch hier bietet der Umgang mit dem konkreten Modell eines Kaleidoskops (welches natürlich wieder nur eine unperfekte Annäherung an ein ideales Kaleidoskop darstellt) einen spannenden Erfahrungsraum. Insbesondere das Verhältnis von motivischer und struktureller Komponente zu untersuchen (wie wirken verschiedene Objekte, wenn man sie in das Kaleidoskop hineinlegt?) ist sehr reizvoll.

Reflektionsgruppen sind sehr instruktive, aber bei weitem nicht die einzigen Möglichkeiten für Symmetriegruppen von Flächenornamenten. Es soll hier nicht in Ausführlichkeit auf die Theorie ebener Flächenornamente eingegangen werden – es sei nur so viel gesagt: Liegen in einem Flächenornament Verschiebesymmetrien in mindestens zwei verschiedenen Richtungen vor, so muss das Ornament zu einer der so genannten *kristallographischen Gruppen* gehören. Davon gibt es genau 17 Stück (und das ist ein tiefes mathematisches Ergebnis). Nur vier davon sind tatsächlich Reflektionsgruppen. Wie kann man nun erreichen, dass für die verbleibenden 13 Gruppen ein ähnlich haptisch experimenteller Umgang ermöglicht wird wie für die Reflektionsgruppen? An dieser Stelle kommen interaktive Computer-Installationen ins Spiel. Im *ix-quadrat* gibt es eine Serie von computergestützen Exponaten, die es gestatten, Erfahrungen, die in der realen Welt nicht ermöglicht werden können, in virtualisierter Weise zu machen. Auch diese Computerexponate stellen in einem bestimmten Sinn mathematische Modelle dar. Um Erfahrungen mit den 17 kristallographischen Gruppen machen zu können, gibt es beispielsweise ein Programm, bei welchem nach Auswahl einer der Symmetriegruppen auf dem Bildschirm gezeichnete Striche automatisch entsprechend der Regeln der Gruppe über und über

Abb. 12: Ornamente Zeichnen im ix-quadrat

auf dem Bildschirm wiederholt werden (Abb. 12). Durch die Berechnungen des Computers entsteht ein ornamentales Muster, das zur entsprechenden Symmetriegruppe gehört. Mit einem solchen Programm ist ein sehr kreativer Umgang mit Symmetriegruppen möglich, der nicht selten stundenlang zu fesseln vermag.

An dieser Stelle soll nun auf einige wichtige Aspekte eingegangen werden, die das Verhältnis von *realem* Modell zu *virtuellem* Modell noch einmal präzisieren soll.

Was heißt virtuell? Natürlich ist auch ein Computer ein Objekt unserer Alltagserfahrung. Letztlich besteht er ja aus echter Materie. Insofern sind natürlich auch die Erfahrungen, die man mit einem Computer machen kann (wie z.B. das Zeichnen in einer Ornamentgruppe) sehr realer Natur. Der entscheidende Unterschied eines Computerprogramms, das als mathematisches Modell dient, zu einem realen Modell, das aus Pappe, Pfeifenreinigern, Bambusstangen oder Spiegeln besteht, ist jedoch, dass bei letzterem die Wirkmechanismen, die den beobachteten Effekt hervorrufen, in der Regel aus der Konstruktion des Modells direkt zu erschließen sind. Jedes Kind kennt den Effekt, den ein Spiegel hervorruft. Kombiniert man mehrere Spiegel zu einem Kaleidoskop, so ergibt sich das komplette Verhalten des Kaleidoskops als Ganzes aus dem Verhalten der einzelnen Spiegel und der, der direkten Beobachtung zugänglichen geometrischen Anordnung der Spiegel. Bei einem Ornamentzeichenprogramm ist dies anders. Hier wird das Verhalten des Computerexponates nicht mehr durch Mechanismen bestimmt, die der direkten Erfahrung des Benutzers zugänglich sind. Vielmehr wurde das Verhalten zum Zeitpunkt der Programmierung von einem Programmierer (der in diesem Fall der Modellbaumeister ist) festgelegt. Idealerweise hat dieser zwar versucht, in seinem Programm gewisse mathematische Wirkmechanismen nachzubilden. Darüber sicher sein kann sich der Benutzer jedoch nicht.

Wer legt die Spielregeln fest? Dennoch kann man im Umgang mit derartigen virtuellen Modellen genau so gut mathematische Ideen transportieren wie mit realen Modellen. Es ist hierzu allerdings eine fundamentale Voraussetzung zu erfüllen: Der Benutzer muss Vertrauen in das Verhalten des Programms gewinnen und die vom Programm umgesetzten Strukturen nachvollziehen können. In gewissem Sinne müssen die entscheidenden Spielregeln des Programms so durchschaubar sein, dass der Benutzer sofort die dahinter liegenden Wirkmechanismen erkennt. Das Verhalten des Programms muss klar erkennbaren elementaren mathematischen Mustern folgen. Am Beispiel des Ornamentzeichenprogrammes bedeutet dies z.B., dass klar erkennbar ist, dass das Programm den vom Benutzer gezeichneten Linienzug nach bestimmten Regeln verschoben, verdreht und gespiegelt vielfach auf dem Bildschirm reproduziert. Letztlich sollte das Programm den Eindruck vermitteln, das es „nur“ Dinge tut, die der Benutzter mit genügend Zeit und Geduld und dem geeigneten Material auch selbst hätte ausführen können. Insbesondere wenn derartige Programme im Ausstellungsbetrieb oder in didaktischen Szenarios eingesetzt werden, stellt dies besondere Voraussetzungen an die Haptik und Benutzerergonomie des Programms. Dem Benutzer muss der glaubhafte

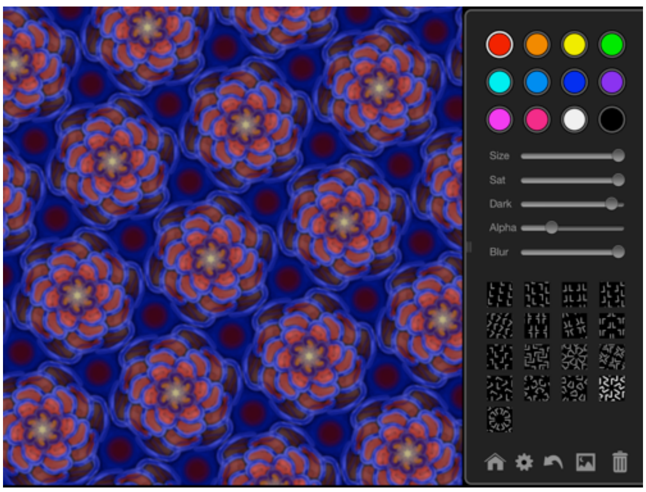

Abb. 13: Ornamentzeichenprogramm für das iPad

Eindruck vermittelt werden, dass er sich in einer zwar simulierten, aber in sich logischen und stimmigen Umgebung bewegt. Neuere Entwicklungen in Hard- und Software verschärfen diese Anforderungen noch. Insbesondere bei der Benutzung von Touchscreen-Geräten wird vom Benutzer oftmals erwartet, dass sich die dargestellten Objekte bezüglich Berühren analog zu realen Objekten verhalten. Der Screenshot in Abbildung 13 zeigt ein für Touchdisplay adaptiertes Ornamentzeichenprogramm, bei dem ein sehr intuitives Zeichnen ermöglicht wird. Eine umfangreiche Sammlung virtueller Modelle wurde kürzlich im mathematischen Kabinett des Deutschen Museums eröffnet. Bedingt durch die hohe mechanische Beanspruchung durch sehr viele Besucher wurden in diesem Szenario sogar Modelle, die sich im Prinzip real fertigen lassen, als virtuelle Modelle mit Touchscreen-Haptik umgesetzt.

Was soll ein virtuelles Modell leisten? An dieser Stelle soll auf einen wichtigen Aspekt der virtuellen Umsetzung mathematischer Zusammenhänge aufmerksam gemacht werden. Es gibt prinzipiell zwei verschiedene Herangehensweisen, mathematische Zusammenhänge durch Computereinsatz zu vermitteln: *Animation/Annotation* und *Simulation*. Bei der Animation/Annotation wird durch ein Stimulus-Response Muster im Programm festgelegt, welche Bildschirmausgaben bei bestimmten Benutzereingaben erzeugt werden sollen. Im Prinzip legt hierbei der Programmierer im Detail das Verhalten des Programms selbst fest. Im Kontrast hierzu werden bei einer Simulation lediglich die inneren Wirkmechanismen eines Zusammenhangs programmiert. Das Verhalten des Programms ergibt sich dann als logische Konsequenz dieser Wirkmechanismen. Typischerweise ist es intellektuell wesentlich herausfordernder, eine Simulation zu programmieren. Hierzu müssen die zu Grunde liegenden fundamentalen Zusammenhänge inhaltlich in Tiefe durchdrungen und algorithmisch nachgebildet werden. Dafür bieten Simulationen aber den unschätzbaren Vorteil, dass sie durch die Nachbildung der fachlogischen Zusammenhänge in der Regel wesentlich freier von Artefakten und Unstimmigkeiten seid, was sich in höherer Robustheit im didaktischen Einsatz niederschlägt. Während Animation/Annotation Szenarios vergleichsweise schnell in ihrem Reaktionsspektrum ausgereizt sind, regen Simulationen oftmals zu ausgiebigen Experimenten mit dem virtuellen Modell an. Virtuelle Modelle, die ein großes Handlungsspektrum bieten, können in der Lehre sowohl zu Demonstrationszwecken als auch zum Selbststudium verwendet werden. Der Einsatz einer sehr umfangreichen Sammlung von rund 500 unterrichtsrelavanten Applets im Rahmen der Sammlung *Mathe-Vital* an der TU München wird sowohl von Dozenten als auch von Studierenden sehr rege angenommen.

Modelle von Prozessen

Mathematische Katastrophen kommen vergleichsweise nüchtern daher. Die so genannte *Katastrophentheorie* beschreibt Vorgänge, bei denen in einem dynamischen System – hervorgerufen durch die kontinuierliche Veränderung eines Kontrollparameters – eine plötzliche qualitative (und sprunghafte) Änderung des Zustands des Gesamtsystems auftritt. Diese Modellierung kann man auf Systeme tatsächlich katastrophalen Ausmaßes anwenden (die globale Durchschnittstemparatur wird erhöht bis das Klima „kippt“). Sie passt aber auch schon auf wesentlich banalere Vorgänge. Erhöht man langsam den Druck auf eine Seite eines altmodischen Kippschalters, wird er irgendwann (plötzlich) die Stellung wechseln. In der Tat ist das Umspringen in einen anderen Zustand ein Prozess, der sich dadurch auszeichnet, dass es dafür sogar wunderbare reale Modelle gibt, an denen man diesen Prozess haptisch nachempfinden kann. Ein sehr einfaches

Modell dieser Art ist de so genannte *Zeemansche Katastrophenmaschine* (sie wurde in den 70er Jahren des letzten Jahrhunderts von dem britischen Topologen und Systemtheoretiker Erik Christopher Zeeman erdacht). Die Katastrophenmaschine hat einen geradezu ernüchternd einfachen Aufbau; gerade das macht sie aber sehr gut analysierbar und prädestiniert dafür, als Modell für die Entstehung einer Katastrophe zu dienen: Ein drehbar gelagertes Rad ist an einem Peripheriepunkt über ein Gummiband mit einer Grundplatte verbunden. Am gleichen Punkt greift noch ein weiters Gummiband an, dessen Ende man frei bewegen kann. Bewegt man das freie Ende des Gummibandes langsam durch die Ebene, so gibt es Situationen, an denen das Rad plötzlich und scheinbar unerwartet seine Position drastisch ändert.

Abb. 14: Zeemansche Katastrophenmaschine (Modell von Tony Phillips).

Katastrophe:
Dynamisches System, das bei kontinuierlicher Änderung eines Parameters plötzlich von einem globalen Zustand in einen anderen wechselt.

Die Zeemansche Katastrophenmaschine ist einer der sehr wenigen Fälle, in denen sich ein mathematischer *Prozess* (im Gegensatz zu einem Objekt, wie dem Kepler-Poinsot-Stern) als reales Modell umsetzen lässt. Die durch die Zeemansche Katastrophenmaschine verkörperte abstrakte Idee ist, dass es deterministische Systeme gibt, bei denen (durch Bifurkationen bzw. topologische Faltungen im Konfigurationsraum) kleine Parameteränderungen zu makroskopischen Zustandsänderungen führen können. Es ist relativ einfach, sich entweder aus Lego oder mit etwas fester Pappe, einem Reißnagel als Drehgelenk und ein paar Gummibändern ein solches Modell selbst zu fertigen. Experimentiert man ein wenig damit, so bekommt man einen recht guten Eindruck von den wirkenden Kräften, die die katastrophale Zustandsänderung hervorrufen.

Natürlich gibt es in der Mathematik (und insbesondere in der Theorie der dynamischen Systeme) eine Vielzahl von strukturierenden abstrakten Ideen, die einen eher *prozesshaften*, als *objekthaften* Charakter haben. Solche umfassen z.B. Konzepte wie Bifurkation, stabile und labile Gleichgewichte, Attraktoren, Phasenraum, Chaos, Phasenübergänge und natürlich auch Katastrophen. Die wenigsten dieser Ideen sind einer direkten realen Veranschaulichung zugänglich. Insbesondere herrscht hier ein fundamentaler Unterschied zu eher objekthaften Strukturen (Platonische Körper, Symmetriegruppen, etc.): Während man bei Modellen objekthafter Strukturen eine vergleichsweise große Freiheit in der Wahl der Materialien hat (um die Idee eines Platonischen Körpers zu transportieren ist es vergleichsweise egal, ob man ihn aus Pfeifenreinigern, Gips, Pappe, Knetgummi oder Kuchenteig formt, solange die relative geometrische Lage der Modellteile hinreichend klar zu Tage tritt), ist man beim Modellieren prozesshafter Ideen immer darauf angewiesen, einen geeigneten physikalischen Prozess zu lokalisieren, mittels dessen sich die Idee in vereinfachter Form vermitteln lässt.

Auch hier wollen wir kurz die Möglichkeiten des Einsatzes virtualisierter Modelle diskutieren. Bereits im Falle der Zeemanschen Katastrophenmaschine ergeben sich durch eine Virtualisierung einige nicht zu unterschätzenden Vorteile. Voraussetzung ist natürlich auch hier wieder, dass einerseits eine hinreichend stabile Simulationsumgebung zur Verfügung steht (in diesem Fall bietet es sich an, ein geeignetes Verfahren zur Simulation physikalischer Systeme zu hinterlegen) und dass auch hier die Spielregeln hinreichend einfach sind, um vom Benutzer als Abstraktion von mathematischen Wirkmechanismen wahrgenommen zu werden (dies kann in diesem Fall z.B. durch eine stimmige Physiksimulation erreicht werden, so dass sich das System verhält „wie echt"). Der große Vorteil einer Virtualisierung in dieser Situation ist, dass die Simulation Zugriff auf Modellparameter bieten kann, die in einem physikalischen Modell nicht direkt zugänglich wären. Bei der Katastrophenmaschine z.B. ist es möglich, die potentielle Energie des Systems für alle Positionen des Rades als Funktion in Abhängigkeit des Radwinkels zu zeichnen. Die aktuelle Position des Rades kann in dieses Energiediagramm eingetragen werden. Jeder Position des frei beweglichen Punktes am Ende des einen Gummibandes ist eindeutig eine solche Energiefunktion zugeordnet. Ist die Reibung eines Systems groß genug, so streben dynamische Systeme danach, in einem lokalen Energieminimum zur Ruhe zu kommen. Die Energiefunktion des Rades kann nun aber (für bestimmte Positionen des freien Zugpunktes) mehrere solcher Lokalen Minima aufweisen. Für andere Positionen gibt es hingegen nur ein Minimum. Verändert man nun die Position des Zugpunktes, so kann beim Durchgang durch gewisse singuläre Situationen ein hochliegendes lokales Minimum mit einem benachbarten Maximum zu einem Sattelpunkt verschmelzen und danach verschwinden. In solch einem Übergang tritt die Katastrophe ein. Der Zustand des Systems kann von dem hochliegenden (aber durch die Parameteränderung verschwindenden) lokalen Minimum in das benachbarte tiefere Minimum „abrutschen". Abbildung 15 zeigt eine solche Zustandssituation kurz vor und kurz nach einer Katastrophe. Die Virtualisierung ermöglicht hier ein viel tieferes Verstehen der zu Grunde liegenden Zusammenhänge.

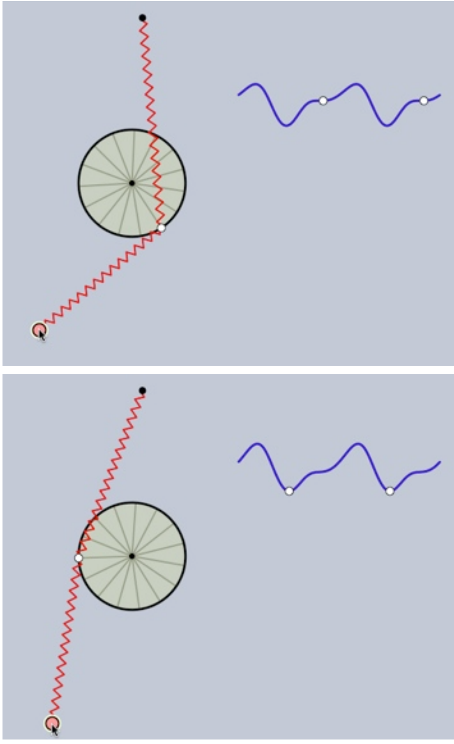

Abb. 15: Computersimulation der Zeemanschen Katastrophenmaschine. Zur zusätzlichen Erläuterung werden Funktionen potentieller Energie angezeigt.

Als finales Beispiel wollen wir ein virtuelles Modell eines sehr komplexen Prozesses an der Schnittstelle von mikroskopisch zu makroskopisch betrachten: Ein Modell für Zustandsänderungen bei Kristallisationsprozessen. Phasenübergänge sind in der Materialwissenschaft ein allgegenwärtiges Phänomen. Stoffe schmelzen, verdunsten, gefrieren, kristallisieren, etc. Die dahinter liegenden Phänomene sind komplex und der direkten Anschauung nicht zugänglich. Ein sehr einfaches virtuelles Modell kann dazu dienen, zumindest einige der dahinter liegenden Wirkmechanismen erfahrbar zu machen. Das Modell hat zwar mit den realen Vorgängen in Materialien nicht viel gemeinsam, ist aber in der Lage (in der für ein Modell typischen Vereinfachung) zumindest grundlegende Prinzipien zu transportieren. Das Modell zu beschreiben ist vergleichsweise einfach. Wir betrachten eine „Teilchensuppe", bestehend aus positiv und negativ geladenen Teilchen. Anders als in der echten Welt sollen die Teilchen sich aber lediglich in einer zweidimensionalen Ebene bewegen können. Auf große Entfernungen sollen sich die Teilchen gemäß der von ihnen erzeugten Ladungskräfte anziehen oder abstoßen. Auf ganz kurze Entfernung soll immer eine Abstoßung vorliegen, welche von einem einstellbaren „Teilchenradius" bestimmt wird (dies modelliert die Abstoßung von positiv geladenen Atomkernen). Die Dynamik des Systems wird durch eine geeignete Physiksimulation hergestellt, welche die auf Teilchen wirkenden Kräfte in Beschleunigungen umsetzt (dazu gibt es recht wohl verstandene numerische Methoden, die nicht all zu schwer algorithmisch umsetzbar sind).

Die Parameter eines solchen Systems sind die Ladungen der Teilchen sowie deren Radien. Wir wollen uns hier auf den einfachsten Fall von zwei Sorten Teilchen beschränken. Jede Sorte soll einen festen Radius und eine feste Ladung haben (Abb. 16). Überlässt man ein solches (im Computer simuliertes System) sich selbst, so bilden sich nach kurzer Zeit kristalline Strukturen heraus. Haben z.B. die Teilchen Ladungen +1 und –1 und sind die Radien nicht all zu klein, so bildet sich ein Schachbrettartiges Muster (a) heraus (analog zum 3-dimensionalen Kochsalz). Bereits hier kann man erstaunliche Phasenübergänge beobachten. Verkleinert man simultan die Radien aller Teilchen, beginnt die lokale Abstoßung diagonal gegenüberliegender Teilchen zu überwiegen, das System bricht auf und bildet kettenförmige Verbünde (b). Verkleinert man die Radien weiterhin, so bilden sich Dipole, die großräumig eher elektrisch neutral sind und somit als losgelöste Teilchen existieren (c). Verkleinert man nur Radien einer-Teilchensorte, so bilden sich statt quadratischen dreiecksförmige Muster heraus (d). Verändert man zudem noch die Ladungen der Teilchen, so treten noch sehr vielfältige anderweitige „Kristallstrukturen auf" (e-g). Die einfache Teilchensuppe wird somit zu einem Modell, an dem sich Phasenübergänge studieren lassen.

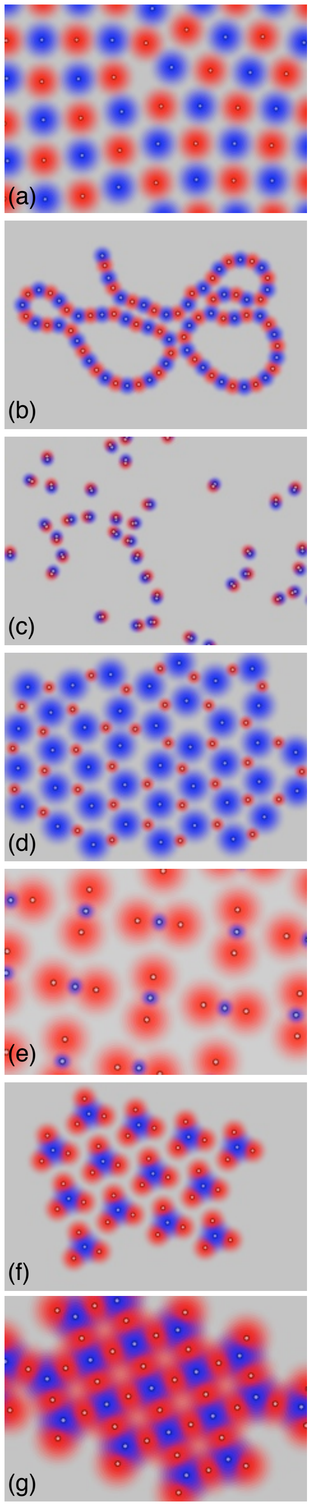

Abb. 16: Computersimulation einer 2-dimensionalen „Teilchensuppe". Für verschiedene Parameter stellen sich unterschiedliche Formationen ein.

Es ist sogar möglich, katastrophenähnliche Effekte in solchen Teilchensuppen zu beobachten. Betrachtet man beispielsweise die Situation, in der eine Teilchensorte die Ladung +4 und die andere Teilchensorte die Ladung –1 erhält, so kann man durch Veränderung des relativen Radius katastrophenähnliche Übergänge erzeugen, die zum spontanen Übergang von gasförmigen zu kristallinen Strukturen führen (Abb. 17). Sind beide Teilchensorten ungefähr gleich groß, so bilden sich „Gasmoleküle" heraus, bei dem ein stark geladenenes Teilchen von 4 schwach geladenen umgeben ist. Auf große Entfernungen wirken diese Moleküle elektrisch neutral, was dazu führt, dass sich diese Cluster frei im Raum verteilen (A). Verändert man nun das Verhältnis der Radien der beiden Teilchensorten, so dass die zentralen Teilchen kleiner werden, so beginnen die Abstoßungskräfte der schwach geladenen Teilchen am Rand zu dominieren. Eines der vier äußeren Teilchen wird quasi heraus gedrängt (B). Schließlich kommt es zu Katastrophe und das Teilchen verlässt den Verband des Gasmo-

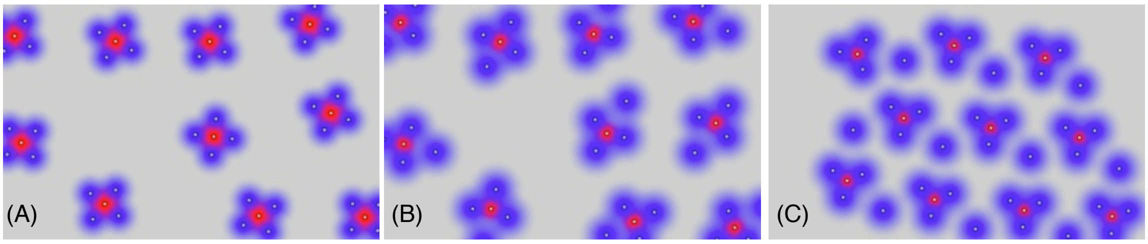

Abb. 17: Phasenübergang bei Radiusänderung (Landung rot = +4, blau = –1). Wird der Radius der roten Teilchen verkleinert, so verlässt eines der blauen Teilchen den Verband. Danach sind die Cluster geladen und bilden mit den freien blauen Teilchen einen Kristallverband.

leküls. Dieses ist dadurch aber positiv geladen und die freien Teilchen mit Ladung –1 beginnen, mit dem verbleibenden Rest des Gasmoleküls einen kristallinen Verband zu bilden, der in diesem Fall eine dreiecksartige Struktur herausbildet (C). Hier dient die virtuelle Teilchensuppe als Modell für einen katastrophalen Phasenübergang. Die Bilder in diesem Artikel vermögen nur in sehr rudimentärer Weise zu vermitteln, welch spannende Erfahrungen sich mit einem solch einfachen modellhaften Spielzeugexperiment machen lassen.

Modelle und Mathematikkommunikation

Das Ganze ist mehr als die Summe der Teile.

Aristoteles

Der in diesem Text gespannte Bogen soll aufzeigen, dass mathematische Modelle, ob nun real oder virtuell, eine Vielfalt von Funktionen erfüllen können. Für den Modellbauer (resp. Mathematiker) können sie Mittel zum vertieften Verständnis sein, konkreter Reibungspunkt mit abstrakten Strukturen. Sie können für den Dozenten zum Demonstrationsobjekt werden, mittels dessen bestimmte Zusammenhänge klarer und anschaulicher vermittelt werden. Für den Studierenden können sie lehrreiches Objekt zum Selbststudium sein. Für einen Ausstellungsbesucher sind sie nicht selten ein Erstkontakt mit tieferen mathematischen Zusammenhängen, die über den Schulstoff hinaus gehen. Unter diesem letzteren Aspekt soll abschließend auf einige Gestaltungsaspekte eingegangen werden, die bei der Einrichtung des *ix-quadrat* eine Rolle gespielt haben.

Bevor im Jahr 2002 das *ix-quadrat* in Garching eröffnet wurde, stellten sich viele konzeptionelle Fragen. Eine der fundamentalsten Fragen war hierbei die des Ausstellungskonzeptes. Die Ausstellung musste auf kleinem Raum realisierbar sein (der Ausstellungsraum hat eine quadratische Grundfläche mit Seitenlänge von 9 Metern). Es sollte sich einerseits ein klarer Bezug zur Mathematischen Modellsammlung der TU München ergeben, andererseits ein frisches Bild von Mathematik vermittelt werden. Nicht zuletzt musste mit dem Ausstellungskonzept auch die Frage nach der Zielgruppe der Ausstellung geklärt werden.

Leider ist Mathematik in Deutschland und auch in vielen anderen Ländern ein Fach, das nicht selten mit Berührungs- und Versagensängsten besetzt ist. Eine wesentliche Entscheidung war aus dieser Überlegung heraus, im *ix-quadrat* die Mathematik und ihre Phänomene „nahbar" zu machen. Gleichzeitig sollten aber auch fachliche Zusammenhänge nicht unangemessen vereinfacht werden. Hieraus ergab sich ein Konzept, in welchen die Modelle über ihren individuellen Charakter hinaus noch zahlreiche Verknüpfungen untereinander aufweisen. Zu bestimmten Themenkreisen gibt es jeweils eine Serie von Exponaten, die die Inhalte von verschiedensten

Blickwinkeln her beleuchten, und in ihrer Gesamtheit ein vielschichtiges und komplexes Bild vermitteln können. So umfasst beispielsweise das Gebiet *Symmetrie* (unter anderem) die folgenden Stationen: Einfache Spiegel, Klappspiegel, Kaleidoskope, Platonische Körper, Raumpackungen, Polyederspiegel, Archimedische Körper, Ornamentgruppen, Raumsymmetrien, Fraktale, Quasikristalle, Sierpinski Tetraeder. Die Auswahl ist bewusst so angelegt, dass die einzelnen Modelle, welche als klassische Modelle, hands-on Experimente oder virtuelle Exponate ausgelegt sind, einerseits für sich selbst einen großen ästhetische und intellektuellen Reiz haben, andererseits auf mannigfaltige Art miteinander in Beziehung treten können. Durch verschiedene Darstellung z.B. von platonischen Körpern als klassisches Modell, hands-on Experimenten (Polyederspiegel) und virtuellen Exponaten mit der Möglichkeit zur Veränderung werden verschiedene Aspekte eines abstrakten Objektes in jeweils geeigneter Weise veranschaulicht.

Dem Ausstellungspersonal kommt dabei die Rolle des „Augenöffners" zu. Es soll gezielt auf die Hintergründe und Bedürfnisse der Besucher ausgerichtet genau so viel Mathematik vermittelt werden, wie in der jeweiligen Situation angemessen ist. Abschließend zwei nicht ganz untypische Zitate von *ix-quadrat* Besuchern: *„Ich hätte ja gar nicht gedacht, das Mathe auch Spaß machen kann" – „Der Raum ist von innen ja viel größer als von aussen..."*

Web Tipps

`www.mathe-vital.de` – sehr umfangreiche Sammlung interaktiver Materialien für den Universitären Unterricht.

`www.mima.museum` – Homepage des Museums für Mineralien und Mathematik in Oberwolfach.

`www-m10.ma.tum.de/ix-quadrat` – Homepage der Mathematikausstellung ix- quadrat. Viele Bilder von Besucherinteraktionen.

`www.morenaments.de` – Java Programm von Martin von Gagern zum Zeichnen in kristallographischen Gruppen.

`www.science-to-touch.com` – iPad Programm zum Zeichnen in kristallographischen Gruppen, inklusive umfangreicher Erklärungen.

`www.cinderella.de` – Programm Cinderella zum Erstellen interaktiver virtueller mathematischer Modelle.