Mikrolaboratorien und virtuelle Modelle im universitären Mathematikunterricht

Jürgen Richter-Gebert

Technische Universität München

Zusammenfassung Der Artikel befasst sich mit Einsatzmöglichkeiten computergestützter Visualisierungen im mathematischen Unterricht. Anhand von Begriffspaaren werden Kategorien diskutiert, die beim Erstellen und Einordnen solcher Materialien relevant sind. Insbesondere werden Möglichkeiten erörtert, die sich aus dem Einsatz von Simulationen ergeben, bei denen die hinter mathematischen Phänomenen liegenden Wirkmechanismen im Computer nachgebildet werden. Solche virtuellen Abbilder mathematischer Strukturen haben Einsatzmöglichkeiten, die denen klassischer (realer) Modelle vergleichbar sind. Sie eignen sich gleichsam zu Demonstrationszwecken wie auch zum intrinsisch motivierten Selbststudium. Im Artikel werden weiterhin Qualitätskriterien diskutiert, die beim Erstellen der interaktiven Materialsammlung *Mathe-Vital* eine Rolle spielen.

1 Einleitung

Mathematische Modelle haben eine lange Tradition im universitären Mathematikunterricht. In ihrem Einsatz spiegelt sich ein Spannungsfeld wider, mit dem jeder konfrontiert ist, der sich ernsthaft mit Mathematik auseinandersetzt. Einerseits ist Mathematik eine ausgesprochen formale Wissenschaft, die ihre Stärke daraus bezieht, Abstraktionen zu schaffen und unumstößliche Aussagen durch streng logische, formale Herleitungen zu beweisen. In der Tradition von Euklid, Hilbert und Bourbaki wird ein großer Teil mathematischen Schaffens im Erzeugen, Nachvollziehen und Vermitteln eben solcher Beweisketten gesehen – idealerweise ausgehend von Axiomen als Abfolge nachvollziehbarer rein logischer Schlüsse ohne Bezugnahme auf Illustrationen. Mathematisches Denken hingegen findet oftmals auf einer vollkommen anderen Ebene statt als die *„fertige“*, *aufgeschriebene* (und nicht selten *unterrichtete*) Mathematik. Beim Erarbeiten mathematischer Zusammenhänge spielen Anschauung, bildhaftes und diagrammatisches Denken, und

nicht selten auch Intuition eine nahezu sprichwörtliche Rolle[1]. Oftmals steht vor dem finalen Aufschreiben eines streng formalen Beweises eine lange Kette von Explorationen, bei denen ein eher ganzheitliches geometrisches, diagrammatisches oder zuweilen auch physikalisches Denken eine große Rolle spielt.
Beim Erlernen von mathematischen Strukturen und Arbeitsweisen steht die Studentin/der Student nicht selten vor der Aufgabe, aus dem in Form von Texten oder Vorlesungen präsentierten Wissen wieder zu dechiffrieren, wie die Genese der Gedanken von einer ursprünglichen Problemstellung zu einer bestimmten Begriffsbildung oder Beweiskette geführt hat (letztlich macht in der Mathematik genau dies ein tieferes Verständnis aus). Ein guter mathematischer Unterricht trägt dem in der Regel Rechnung, indem er versucht, neben der streng logischen Deduktion auch die Genese der Begriffe darzulegen. An dieser Stelle kommt dem Einsatz mathematischer Modelle eine zentrale Rolle zu.

Modell:
Der Begriff *Modell* sei hier in einem sehr weitem Sinne zu verstehen, der neben dreidimensionalen Modellen auch kinematische Demonstrationen sowie auch hinreichend aussagekräftige 2-dimensionale Zeichnungen umfassen soll. Das Wesen eines Modells sei hier so charakterisiert, dass es einen bestimmten mathematischen Zusammenhang in bildhafter, physischer und nicht formaler Weise zum Ausdruck bringt. Naturgemäß sind dabei Vereinfachungen des darzustellenden Sachverhaltes oder Gegenstandes zulässig.

Der Einsatz von Modellen in der Lehre kann auf mannigfaltige Weise stattfinden: als Demonstrationsobjekt im Frontalunterricht, als Anschauungsmaterial zum eigenen Nachvollziehen, als Objekt, an dem bisher unbekannte Effekte offenbar werden, bis hin zum Objekt, das man selbst schafft (entweder um einen Zusammenhang zu vermitteln oder ihn zu verstehen, oder aber aus purer Freude an der dem Zusammenhang innewohnenden Ästhetik). Felix Klein (1928), einer der Hauptprotagonisten der Modellbautradition im ausgehenden 19ten Jahrhundert, schreibt in seinem Buch *Entwicklungen der Mathematik im 19ten Jahrhundert* über den Zweck von Modellen und Modellbauseminaren:

> *Wie heute [~1925], so war auch damals [1840-1880] der Zweck des Modelles nicht die Schwäche der Anschauung auszugleichen, sondern eine lebendige deutliche Anschauung zu entwickeln, ein Ziel, das vor allem durch das selbst Anfertigen von Modellen am Besten erreicht wurde.*

---

[1] Es sei hier z.B. an Poincarés plötzliche Erkenntnis zum Zusammenhang von Fuchs'schen Gruppen und hyperbolischer Geometrie erinnert, die ihn beim Besteigen eines Omnibusses ereilte.

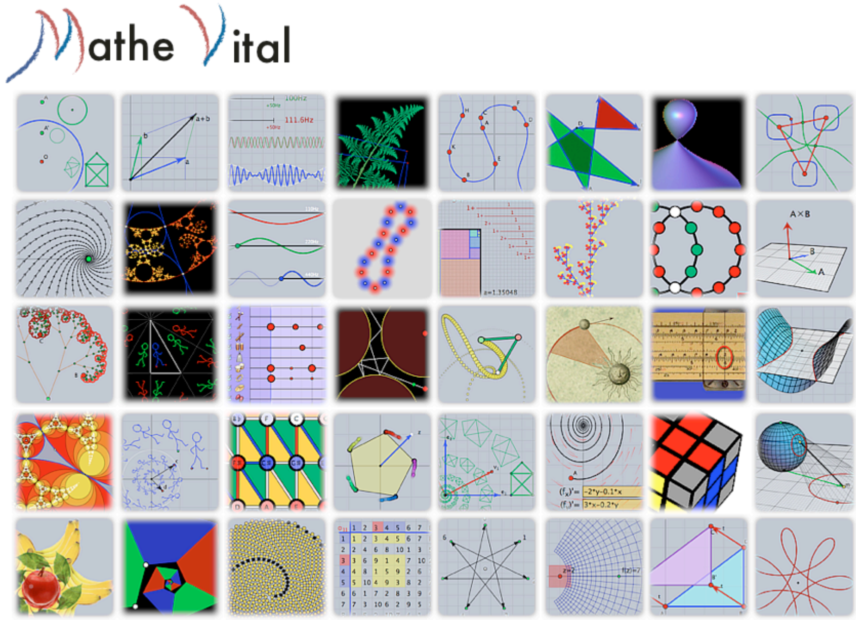

Abb. 1 Eine Auswahl von Mathe-Vital Modulicons.

Der vorliegende Artikel beschäftigt sich mit einer speziellen Art mathematischer Modelle: computergestützte *Visualisierungen*, *Animationen* und *Simulationen*.

Während es klassische Modelle oftmals nur ermöglichen, einen statischen Kontext zu visualisieren bzw. im Falle kinematischer Modelle die Variation von ein bis zwei Parametern darzustellen, ermöglichen Computer einen weitaus flexibleren Umgang mit Visualisierungen. Durch Einsatz geeigneter Berechnungs- bzw. Simulations-Umgebungen ist es möglich, sehr flexible „Modelle" zu schaffen, die es gestatten, mit einer ganzen Schar mathematischer Gebilde zu operieren. Das Aufkommen immer leistungsfähigerer Computer, hochwertiger graphischer Ausgabemöglichkeiten und punktgenauer Eingabemöglichkeiten führt seit den 80er Jahren zu einem stetigen Anstieg von Programmen, die zur Visualisierung und Demonstration von Mathematik einsetzbar sind. Auf verschiedenem Niveau wird über didaktische Implikationen eines solchen Einsatzes diskutiert, über Möglichkeiten, Anwendungsszenarios und Gefahren (siehe z.B. Schulmeister (2005) oder Strzebkoski und Kleeberg (2002)). Hierbei umfasst der Computereinsatz in der mathematischen Lehre ein ausgesprochen vielschichtiges Spektrum, das eine Pauschalisierung von Aussagen ad absurdum führt. Dieser Artikel soll zweierlei Aufgaben erfüllen: Zum einen sollen einige begriffliche Spannungsfelder aufgezeigt und möglichst konkret benannt werden. Sie sollen die Einordnung konkreter Programme und Einsatzszenarios gestatten: Hierzu sollen Begriffspaare dienen, die jeweils in einer Dimension eine gewisse Spannweite aufzeigen. Zum anderen soll der Artikel thesenartig Qualitätskriterien für computergestützte Lernszenarios formulieren. Diese sollen die Diskussion anregen und zur Positionsbestimmung beim Entwickeln eigener computergestützter Modelle dienen.

Die Ausführungen dieses Artikels haben ihren Ursprung hierbei nicht in didaktischer Forschung[2], sondern im praxisnahen Umgang, der Entwicklung, Erstellung und dem Einsatz von interaktiven Lernmaterialien. Viele der hier erwähnten Beispiele entstammen dem Internetportal Mathe-Vital, welches geschaffen wurde, um computergestützte interaktive Materialien für Unterricht in Mathematik und mathematiknahen Fächern bereit zu stellen. Sie wurden im Zusammenhang von Vorlesungen an der TU München entwickelt und stehen frei zugänglich und öffentlich unter einer Creative Commons Lizenz zur Verfügung. Die hier diskutierten begrifflichen Spannungsfelder und Qualitätskriterien waren und sind bei der Erstellung von Mathe-Vital Materialien von fundamentaler Bedeutung. Insbesondere soll der Artikel auch zum reflektierten Einsatz computergestützter Materialien anregen.

2 Mathe-Vital und Cinderella

Das Projekt Mathe-Vital (`www.mathe-vital.de`) wurde 2007 ins Leben gerufen. Zielsetzung ist es, eine Sammlung frei zugänglicher interaktiver Materialien zu schaffen, die sowohl im universitären Unterricht als auch zum Selbststudium eingesetzt werden kann. Die Materialien für das ständig wachsende Projekt entstehen hierbei jeweils direkt aus konkreten Unterrichtsanlässen, zumeist als konkretes Begleitmaterial zu einer Vorlesung oder einem Kurs. Großer Wert wird hierbei darauf gelegt, dass bei den Materialien das Medium Computer einen *echten Mehrwert* gegenüber Texten, Bildern oder Filmen bringt. D.h. die meisten Materialien sind so angelegt, dass die Möglichkeit, auf dem Computer (in Echtzeit) Berechnungen auszuführen, integraler Bestandteil der Interaktion ist. Der Computer soll in gewissem Sinne einen Ausschnitt einer abstrakten mathematischen Realität abbilden und diese somit der direkten sinnlichen Erfahrung zugänglich machen. Dieser primäre Anspruch impliziert weitere Sekundäreffekte:

- *Vertrauenswürdigkeit:* Soll eine interaktive Installation einen Ausschnitt der mathematischen Wirklichkeit abbilden, so sollte der Benutzer sicher sein können, dass sie dies auch tatsächlich tut. In gewissem Sinne müssen die Spielre-

---

[2] Es gibt eine umfassende Literatur, die sich aus verschiedenen Blickwinkeln kritisch mit diversen Aspekten des Computereinsatzes in der Mathematikvermittlung befasst. Stellvertretend sei hier auf die Arbeit von Weth, Weigand (2002) und Laborde, Sträßer (2010) verwiesen.

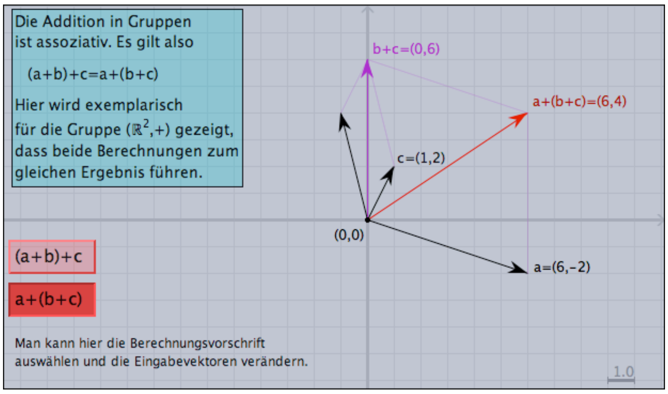

Abb. 2 Vektor Addition in Mathe-Vital.

geln transparent sein, nach denen eine bestimmte Eingabe eine bestimmte Ausgabe hervorruft. (Bei konkreten, physisch existierenden Modellen ist anders als bei Computersimulationen dieser Zusammenhang meist direkt durch das physische Objekt offensichtlich.) Sollte die Simulation nicht exakt die mathematische Realität abbilden (z.B. bei numerischen Simulationen), sollten zumindest die Grenzen klar dargelegt werden.

- *Mehrwert:* Die oben genannten Spielregeln sollten dennoch hinreichend komplex sein, dass durch den Computereinsatz ein echter Mehrwert entsteht. So bietet z.B. das einfache Einzeichnen eines Vektors nach Eingabe dessen Koordinaten nur einen sehr geringen Mehrwert gegenüber einer gut gewählten Zeichnung. Hingegen bietet beispielsweise eine Visualisierung, bei der die Assoziativität der Vektoraddition durch die graphische Darstellung mehrerer auswählbarer Rechenwege illustriert wird, schon einen größeren Mehrwert. Generell kann man sagen, dass der Mehrwert in der Regel durch gesteigerte Flexibilität und Interaktivität erhöht wird (vgl. Abb. 2).
- *Bedienbarkeit:* Der Aufbau komplexer Interaktionsszenarios setzt allerdings auch Grenzen in eine andere Richtung. Frei zugängliche Materialien, die in konkreten Unterrichtsszenarios eingesetzt werden, sollten in der Regel keine Expertentools sein, die nur nach eingehendem Studium der Materie und des Userinterface zugänglich sind. Dem Benutzer muss klar sein, *was* er machen kann und *wie* er das machen kann.
- *Fokussierung:* Als eine weitere Konsequenz ergibt sich hieraus die Notwendigkeit zur Fokussierung innerhalb einer bestimmten Visualisierungssequenz. Soll sich die Bedienkomplexität und gleichsam die kognitive Last bei einer Visualisierung in erträglichen Grenzen halten, so empfiehlt sich innerhalb einer Visualisierung die klare Abgrenzung und Einschränkung auf *einen* zu erklärenden Effekt.

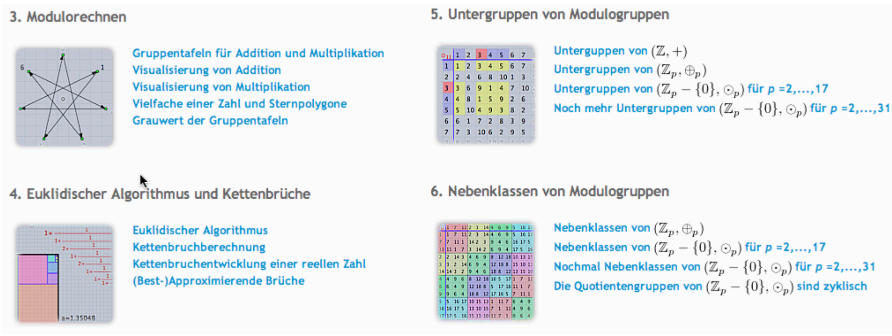

Abb. 3 Modulstruktur beim zur Vorlesung Lineare Algebra gehörenden Themenkreis: Endliche Gruppen und Nebenklassen.

Bedingt durch die oben beschriebenen Primär- und Sekundärziele wurden im Aufbau der Mathe-Vital Sammlung vorab gewisse Designentscheidungen getroffen, die insbesondere die Gliederung der Gesamtsammlung betreffen. Die Sammlung soll frei über einen Webbrowser nutzbar sein. Auf einer zentralen Navigationsseite wird zunächst eine Verteilung auf inhaltspezifische Materialen gewährleistet (Vorlesungen Lineare Algebra, Analysis, Geometriekalküle, etc., Kurse über Mathematik und Musik, Mathematik und Botanik etc.). Innerhalb jeder Kurseinheit zerfällt die Sammlung wiederum in inhaltliche Module, die sich jeweils spezifisch mit bestimmten mathematischen Themen oder Effekten befassen (z.B. Euklidscher Algorithmus, Nebenklassen, komplexe Rechenoperationen, geometrische Transformatioen, etc.). Innerhalb eines Moduls wurde die Anzahl der zur Verfügung stehenden Einzelseiten bewusst auf maximal sieben begrenzt, um klar umgrenzte begriffliche Einheiten zu schaffen, in denen dennoch ein sukzessiver inhaltlicher Aufbau möglich ist (vgl. Abb. 3) . Materialien werden nur in solchen Fällen geschaffen, in denen ein konkreter, für einen Lernanlass relevanter Bedarf besteht.

Derzeit umfasst die gesamte Sammlung rund 500 verschiedene Applets. Circa 350 davon sind direkt universitären Vorlesungsinhalten zugeordnet. Als grober Richtwert hat sich ergeben, dass für eine Vorlesung mit 14 Wochen à zwei Semesterwochenstunden rund 20 Visualisierungen angemessen sind.

Technische Grundlage der meisten auf Mathe-Vital bereitgestellten Materialien ist das Mathematik-Visualisierungssystem *Cinderella.2* (`www.cinderella.de`).

Ursprünglich entstand Cinderella als System zur dynamischen Geometrie mit speziellem Anspruch an hohe mathematische Konsistenz[3].
Seit der Version 2.0 verfügt Cinderella neben dem Geometriekern auch über eine eingebaute Scriptsprache und Möglichkeiten zur physikalischen Partikelsimulation. Insbesondere die Skriptsprache ermöglicht das Erstellen sehr individueller Interaktionsszenarios, die bei Weitem über den Kontext der dynamischen Geometrie hinaus gehen (Kortenkamp, Richter-Gebert, 2010, 2012). Die Scriptsprache ist als funktionale Sprache konzipiert, die es gestattet, beim Erstellen von Visualisierungen auf vergleichsweise hohem Niveau mathematiknah zu programmieren. Ferner ermöglicht das System eine (in den Grenzen der Performace des jeweiligen Client Computers) Echtzeit-Anbindung der Berechnungen an die graphische Ein- oder Ausgabe. Gerade die Skriptmöglichkeiten in Verbindung mit dem graphischen Kern von Cinderella haben sich für die Umsetzung des Mathe-Vital Projektes als sehr wichtig erwiesen.

3 Spannungsfelder

Im Folgenden werden Spannungsfelder, die beim Erstellen computergestützter mathematischer Visualisierungen relevant sind, aufgezeigt . Sie sollen insbesondere zur begrifflichen Kategorienbildung dienen und die Spannweite des Einsatzes interaktiver Visualisierungen aufzeigen.

3.1 Animation und Annotation vs. Simulation

Eine interaktive Mathematikvisualisierung kann auf zwei prinzipiell verschiedene Arten entstehen. Von Außen betrachtet, muss eine interaktive Visualisierung auf bestimmte Eingaben (über Maus oder Tastatur) mit bestimmten (durch den inhaltlichen Kontext vorgegebenen) Bildschirmausgaben reagieren. Wie der Weg von Eingabe zu Ausgabe berechnet wird, liegt letztlich in der Hand des Programmierers und ist für den Nutzer nicht unbedingt zugänglich. Ausgehend von der Annahme, dass ein bestimmter mathematischer oder physikalischer Effekt dargestellt werden soll, sind im Programm zwei verschiedene Mechanismen denkbar:

[3] Um diese mathematische Konsistenz zu erreichen, finden im mathematischen Kern von Cinderella insbesondere Methoden aus der komplexen Funktionentheorie und der projektiven Geometrie sowie dem randomisierten Beweisen Anwendung. Darauf soll hier aber nicht näher eingegangen werden, siehe z.B. Kortenkamp, Richter-Gebert (2001, 2002).

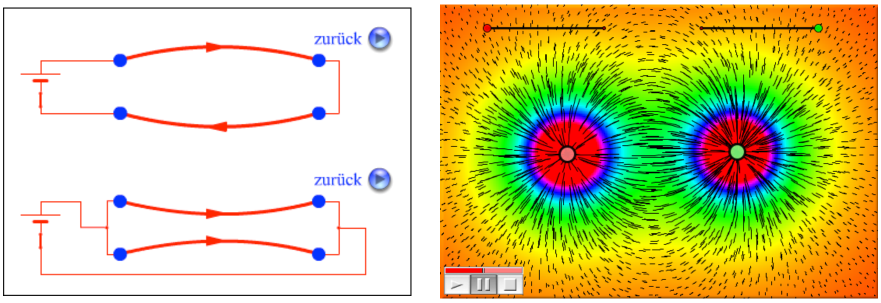

Abb. 4 Links: Animierte und annotierte Abstoßung Stromdurchflossener Leiter (Quelle: Leifi Physik `www.leifiphysik.de`). Rechts: mittels Simulation berechnetes Feldlinienbild zwischen zwei Ladungen (Quelle: Cinderella Dokumentation `doc.cinderella.de`).

1. Das Programm folgt einem vorprogrammierten Stimulus/Response Mechanismus, in dem der Programmierer im Detail festlegt, in welcher Form das Programm auf bestimmte Eingaben reagieren soll.
2. Das Programm folgt problemimmanenten Wirkmechanismen, die versuchen, den zu visualisierenden mathematischen Effekt selbst so weit als möglich nachzubilden und die Anzeige als Konsequenz einer Simulation zu erzeugen.

Mischformen sind natürlich denkbar. Die erste Methode ist in den Bereich der Animation (bestimmte Bewegungsvorgänge werden gezeigt) und Annotation (ein Bild oder Film wird mit zusätzlichen graphischen Elementen, wie z.B. Vektorpfeilen augmentiert) zu zählen. Typischerweise ist das Spektrum der mit einem konkreten Programm erreichbaren Interaktion hier vergleichsweise gering, da das exakte Reaktionsspektrum auf Eingaben vollständig vom Programmierer vorgegeben wird. Dennoch kann es in machen Situationen wichtig sein, auf Animationen oder Annotationen zurück zu greifen, insbesondere wenn Zusammenhänge vermittelt werden sollen, die allein durch Konventionen, nicht aber durch einen inneren Wirkmechanismus bestimmt sind oder wenn die Vorgänge zu komplex sind, um einer Simulation zugänglich zu sein.

Simulation:
Ein Computerprogramm welches den einem Prozess innewohnenden Wirkmechanismus (in den durch die Umsetzung gesetzten Grenzen) nachbildet. Typischerweise werden hierbei die vom Programm erzeugten Ausgaben nicht im voraus durch den Programmierer festgelegt, sondern ergeben sich als Konsequenz des simulierten Prozesses. Simulationen können mit interaktiver Eingabe und graphischer Ausgabe versehen sein, so dass der Eindruck der Interaktion mit einem realen Objekt, das seinen eigenen Gesetzen folgt, entsteht.

Das unter 2. aufgeführte Paradigma fordert ein im Programm umgesetztes Abbild der dem Effekt zugrunde liegenden Mechanismen. Ein solches Abbild wollen wir hier pauschal als *Simulation* bezeichnen. Es bietet naturgemäß eine weitaus größere Flexibilität in der Interaktion, ist allerdings in der Regel auch weithin komplizierter umzusetzen.[4] Eine Simulation kann hier wiederum auf zwei verschiedene Weisen mit dem dargestellten Kontext in Verbindung stehen: Es gibt Anwendungsbereiche, in denen die dahinter liegenden Zusammenhänge vergleichsweise einfach umsetzbar sind und direkt in ein Programm übersetzt werden können (z.B. das Berechnen einer Multiplikationstafel in einem endlichen Körper). In anderen Szenarios erfordert das Bereitstellen einer Simulation selbst eine Modellierung, die es beispielsweise ermöglicht, einen kontinuierlichen Prozess zu approximieren

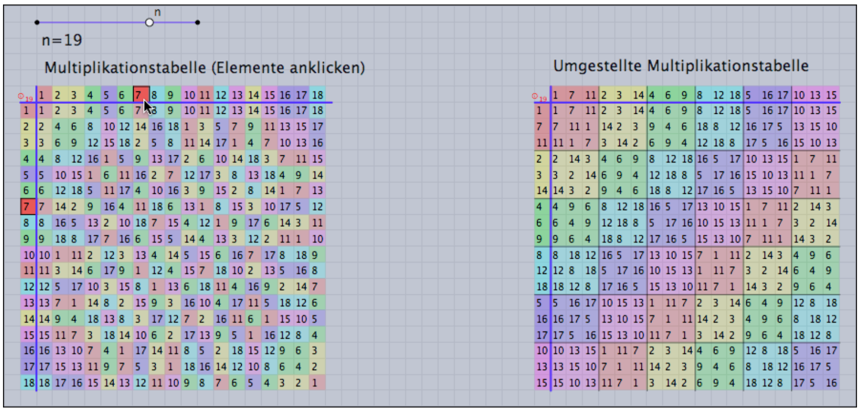

Abb. 5 Mathe-Vital Visualisierung zum Thema Nebenklassen einer endlichen multiplikativen Gruppe. Erzeugende einer Untergruppe können durch Mausklick ausgewählt werden. Zu einer Restklasse gehörige Elemente werden gleich eingefärbt. Eine umsortierte Gruppentafel, an der offenbar wird, dass die Restklassen selbst wieder eine (sogar zyklische) Gruppenstruktur haben, wird automatisch berechnet.

(dies ist z.B. beim Darstellen der Flußlinien eines Vektorfeldes notwendig). Wenn nötig sollte in solchen Fällen auch die zur Darstellung verwendete Methode transparent gemacht werden (vgl. Abb. 4 und Abb. 5).

Vermutlich liegt in diesem speziellen Spannungsfeld auch der Reiz klassischer Visualisierung in der Dynamischen Geometrie. Ausgehend von der Position freier Konstruktionselemente werden hier Schritt für Schritt die abhängigen Elemente einer geometrischen Konstruktion berechnet, so dass in einem *Zugmodus* ein quasi stetiger interaktiver Umgang mit der Konstruktion möglich ist. Dies ermöglicht einen experimentellen Umgang mit dem mathematischen Objekt. Im obigen Sinne

[4] Nicht selten erfordert das Erstellen einer Simulation für einen gewissen Kontext einen nicht unerheblichen Entwicklungs- und manchmal sogar Forschungsaufwand.

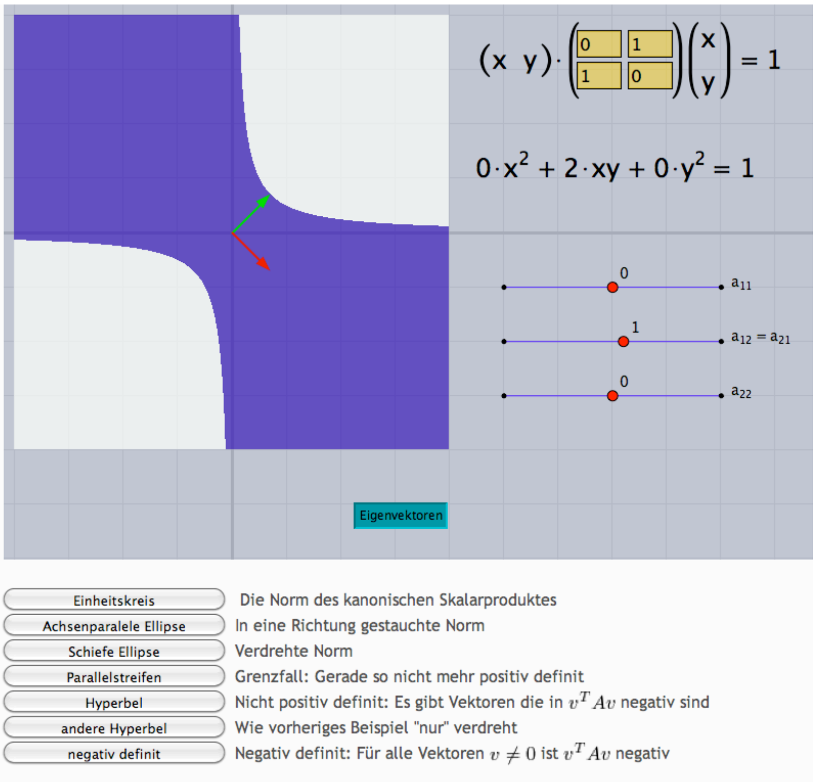

Abb. 6 Mathe-Vital Visualisierung zum Thema Skalarprodukte, Eigenvektoren und Quadriken. Das Applet selbst erlaubt eine vollkommen freie Wahl der zugehörigen quadratischen Form. Im Text sind jedoch gezielt Knöpfe eingebaut, welche im Applet bestimmte interessante Effekte auswählen.

handelt es sich um eine Simulation. Da aber in der Regel alle wesentlichen Elemente der Konstruktion angezeigt werden, ist für den Benutzer der dahinter liegende Wirkmechanismus offensichtlich, und es entsteht dadurch ein großes Vertrauen in die mathematische Korrektheit des Verhaltens der Visualisierung.[5]

Etwas anders gelagert ist die Situation beispielsweise in der Visualisierung von physikalischen Prozessen. Jeder Simulation liegt hier in der Regel ein numerisches Approximationsverfahren zugrunde, das durchaus immanent Grenzen der Simulation (z.B. Instabilitäten in der Nähe von Singularitäten) bedingt.

---

[5] Bereits hier ist allerdings ein blindes Vertrauen in die Mathematische Konstruktion unangemessen. Subtile Unterschiede in der Mathematischen Modellierung können zu großen qualitativen Unterschieden im Verhalten der benutzen Programme führen (Kortenkamp, Richter-Gebert, 2001).

3.2 Demonstration vs. Selbststudium

Bevor in den folgenden Abschnitten auf weitere Aspekte des Designs interaktiver Visualisierungen eingegangen werden soll, sollen zunächst zwei unterschiedliche Aspekte des Einsatzes dargelegt werden. Wie im Fall klassischer Modelle können interaktive computergestützte Visualisierungen einerseits zu Demonstrationszwecken direkt in Vorlesung oder im Rahmen eines Seminars eingesetzt werden. Andererseits ermöglichen sie vertieftes Verstehen im Rahmen von selbstgesteuertem Lernen. Insbesondere im Einsatz als Demonstrationsobjekt zahlt sich das Abbilden mathematischer Zusammenhänge in Form von Simulationsumgebungen aus. Es gibt dem Dozenten die Freiheit, an einem Programm verschiedene Effekte zu erklären und so z.B. flexibel auf Zwischenfragen von Studenten reagieren zu können. Auch hierzu ist es wiederum notwendig, dass die Visualisierung klar umgrenzten und für die Studenten nachvollziehbaren Spielregeln folgt. Die Funktionalität sollte (ähnlich einem physischen Modell) in klarem Bezug zum Erscheinungsbild stehen. Form und Funktion sollten eine semantische Einheit bilden.
Der Einsatz im Selbststudium erfordert zumeist entweder einen noch eindeutigeren Bezug von Erscheinungsbild und Funktion oder eine sehr klare textuelle Beschreibung. Auf dies soll im nächsten Abschnitt eingegangen werden.

3.3 Experiment vs. Benutzerführung

Simulationen im Sinne der letzten Abschnitte bieten die Möglichkeit eines großen experimentellen Spielraums für den Benutzer. Sie bieten somit zumindest auch prinzipiell die Möglichkeit eines reichhaltigen Wirkfeldes für selbst gesteuerte und intrinsisch motivierte Lern- und Erfahrungsanlässe. Die in einer Simulation mögliche Freiheit hat jedoch ihren Preis: mit den Möglichkeiten steigt auch der Erklärungs- und Führungsbedarf, damit ein sinnvoller Umgang möglich ist. Dem kann man auf verschiedene Weise begegnen. Eine Möglichkeit (von der insbesondere in den Mathe-Vital-Modulen oft Gebrauch gemacht wird) ist der schrittweise Aufbau von Komplexität. Innerhalb eines Moduls werden auf mehreren Seiten die Möglichkeiten der Interaktion stufenweise erweitert. Bereits eingeführte Bedienelemente tauchen in späteren Programmen wieder auf. Es wird dabei versucht, mit dem Einführen jeder neuen Möglichkeit auch eine neue mathematische Erkenntnis

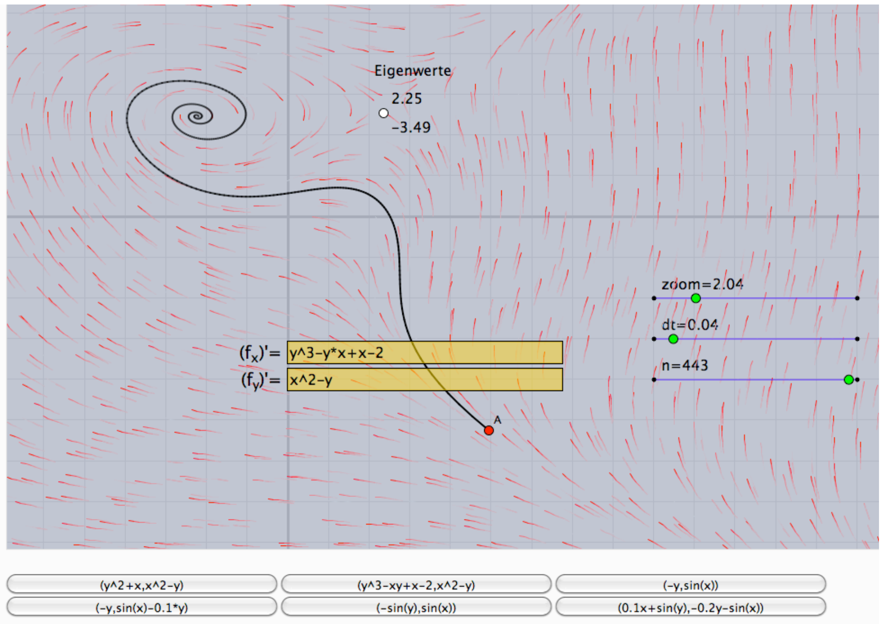

Abb. 7 Virtuelles Labor zur Darstellung zweidimensionaler Vektorfelder. Hier können die Funktionen, welche x- und y-Komponente des Vektorfeldes definieren, vollkommen frei gewählt werden. Der Weg eines (frei verschiebbaren) Testpartikels kann angezeigt werden. Der Eigenwert der Jakobi-Matrix an einem frei wählbaren Testpunkt wird angezeigt. Im html-Text sind Knöpfe für besonders interessante Beispiele integriert.

zu vermitteln.[6] Eine weitere Möglichkeit besteht darin, Hinweise auf mögliche interessante Effekte in den html-Begleittext zu integrieren und direkt über Knöpfe anwählen zu lassen. Auf diese Weise kann ein in weiten Bereichen freies Experimentierfeld dennoch dazu verwendet werden, gezielt bestimmte Effekte zu vermitteln. Im Rahmen von Mathe-Vital und Cinderella wird dies technisch dadurch umgesetzt, dass eine Schnittstelle von JavaScript zu Cinderella verwendet wird, die es gestattet mittels JavaScript Elementen ein Cinderella Applet zu beeinflussen (vgl. Abb. 6 und Abb. 7).

Im Extremfall ist die Flexibilität einer Visualisierung so groß gehalten, dass sie eine Art *virtuelles Mikrolabor* zu einem mathematischen Themenkreis darstellt. Derartige virtuelle Laboratorien eignen sich in sehr hohem Maße zu selbstgesteu-

---

[6] Bei der Visualisierung von Nebenklassen in endlichen additiven und multiplikativen Gruppen, wird z.B. zunächst die Modulo Addition und Multiplikation eingeführt (mit Wahlmöglichkeit der der Gruppe) und danach eine Auswahlmöglichkeit für Erzeugende einer Untergruppe. Im Anschluss daran steht das zusätzliche Anzeigen zugehöriger Restklassen. Am Ende der Sequenz kann man mit Restklassen bezüglich verschiedener Gruppen und Untergruppen experimentieren (vgl. Abb. 5).

ertem (und oftmals hochgradig intrinsisch motiviertem) Explorieren eines Kontextes. In der Regel stehen derartige sehr freie Visualisierungen am Ende eines Mathe-Vital Moduls, nachdem begrifflicher Zusammenhang und Benutzerführung eingehend erläutert wurden. In der Gestaltung solcher virtueller Labore liegt eine besondere didaktische Herausforderung. Idealerweise beruhen sie auf einem einzigen Effekt oder Konzept, das aber in seiner Tragweite einen sehr großen Erlebnisspielraum zulässt. Beispiele hierfür sind z.B. zweidimensionale Vektorfelder (vgl. Abb.7), allgemeine komplexe Abbildungen, Algebraische Kurven durch vorgegebene Punkte, Physikalische Masse/Feder Systeme, etc.

Virtuelles Mikrolabor:
Eine spezielle Form der Simulation, die einen besonders interessanten Handlungsspielraum zulässt, der das eigenständige Experimentieren mit einem Sachverhalt ermöglicht. Oftmals bietet ein virtuelles Labor auch für den Ersteller Forschungs- und Experimentiermöglichkeiten. Virtuelle Labore zeichnen sich durch offene Interaktionsformen aus, die entweder durch vielfältige Parameterwahl, durch freie Eingaben von Funktionen oder durch interessante Kombinationsmöglichkeiten von Objekten entstehen.

Simulationen, die den Stellenwert virtueller Mikrolaboratorien haben, bieten idealerweise die Möglichkeit, im Umgang mit ihnen selbst kreativ neu-entdeckend zu werden. Ein direktes Echtzeit-Feedback auf Veränderung von Eingabegrößen lädt dabei erfahrungsgemäß zum forschenden Lernen ein und führt nicht selten zur Entdeckung von Effekten, die bei der Erstellung der Visualisierung noch nicht in ihrer Reichhaltigkeit absehbar sind. Nicht selten bieten sie selbst für den Entwickler der Materialen ein spannendes Forschungsszenario, bei dem sich die Grenzen zwischen Lehren, Lernen, Entwickeln und Forschen aufheben.

3.4 Freiheit vs. Einschränkung

An dieser Stelle soll nochmals klar herausgestellt werden, dass gerade die Erstellung eines Mikrolabors eine besondere didaktische Feinfühligkeit erfordert. Leicht unterliegt man der Versuchung, ein sehr mächtiges Werkzeug zu produzieren, das in seiner Flexibilität den intendierten Benutzer überfordert. In gewissem Sinne besteht hier die Kunst in der freiwilligen Beschränkung. Großes Augenmerk sollte auf die Art und Anzahl der zur Verfügung stehenden freien Parameter und Objekte gelegt werden. Oftmals ist es sinnvoll, hier bewusst eine Auswahl zu treffen, die

dem Benutzer ein Maximum an Erfahrungsmöglichkeit bei einem Minimum an durch die Benutzerführung verursachter kognitiver Last gewährt.
Jenseits der Aspekte von semantischer Klarheit und Softwareergonomie gibt es allerdings noch einen weiteren Grund, der an dieser Stelle für eine selbstgewählte Beschränkung spricht. Gerade wenn eine virtuelle Visualisierung zum forschenden Lernen verwendet werden kann und dem Benutzer ermöglicht, selbst neue Zusammenhänge zu entdecken, ist eine Übersichtlichkeit zur Analyse der erzeugten Effekte unerlässlich. Die Ursachen beobachteter Effekte können auf diese Weise klarer analysiert bzw. zugeordnet werden. Wirkmechanismen werden deutlicher sichtbar. Strebt man gar einen formalen Beweis der experimentell beobachteten Phänomene an, so ermöglicht eine klare Einschränkung der erlaubten Parameter auch eine klarere Formulierung der Hypothesen und Konklusionen einer auf experimenteller Basis geäußerten Vermutung.

3.5 Content vs. Werkzeug

Viele der Programme, die heutzutage zur Visualisierung von Mathematik verwendet werden, wurden in ihrer ursprünglichen Intention mehr als Werkzeug denn als Autorensystem für Visualisierungen konzipiert. Dies ist nicht nur bei Systemen zur Dynamischen Geometrie zu beobachten (die in ihrer ursprünglichen Intention als computergestützte dynamische Variante geometrischer Konstruktionswerkzeuge gedacht sind), sondern auch bei Computeralgebra-Systemen (so hat sich beispielsweise aus dem System Mathematica© das Wolfram Demonstrations Projekt entwickelt).[7] Es soll an dieser Stelle nochmals deutlich darauf hingewiesen werden, dass das Erstellen didaktisch gestalteter virtueller Modelle und Laboratorien natürlich keinesfalls den Einsatz der ursprünglichen Werkzeuge obsolet macht. Vielmehr sollte von Fall zu Fall in Lehr- und Lernsituationen entschieden werden, wann es ratsam ist, auf vorbereitete Materialien zurück zu greifen, und wann es ratsam ist, Dinge von Grund auf zu entwickeln. Überraschenderweise gilt dies nicht nur in Lehrsituationen mit studentischen Kleingruppen oder individuellen Lernsituationen, sondern auch in Vorlesungssituationen. Im Kontext meiner eigenen Lehre konnte ich beobachten, dass das gezielte und wiederholte Einsetzen von dynamischer Geometriesoftware und Computeralgebra-Systemen als virtuelles *Werkzeug* während einer Vorlesung gleich mehre positive Effekte haben kann:

---

[7] Interessanterweise ist eine Konvergenz zwischen beiden Programmgruppen zu beobachten. Systeme zur dynamischen Geometrie werden zunehmend mit Fähigkeiten zum numerischen und symbolischen Rechnen angereichert. Computeralgebra-Systeme erhalten zunehmend graphisch interaktive Ein- und Ausgabekomponenten.

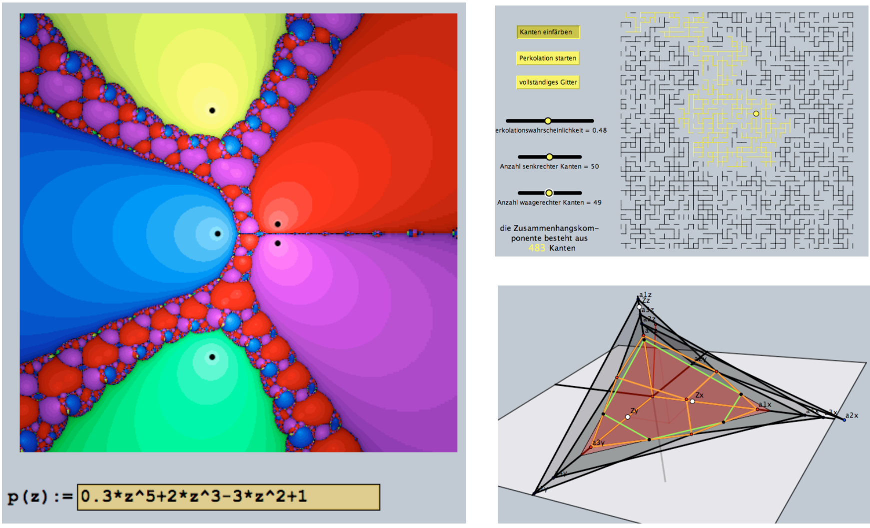

Abb. 8 Studentenarbeiten zu den Themen Newton-Fraktale, Perkolation und lineare Programmierung. Die Visualisierungen entstanden im Rahmen eines Praktikum-Seminars.

- Die Studenten erlangen eine Vertrautheit mit den Möglichkeiten und Grenzen solcher Werkzeuge.
- Bei paralleler Verwendung von vorgefertigten Materialien werden diese in ihrem Erstellungsprozess durchsichtiger und nachvollziehbarer.
- Spontane Zwischenfragen können oftmals durch ein computergestütztes Experiment beantwortet werden: „Probieren wir das mal aus...“
- Die Vertrautheit mit den Werkzeugen schafft auch ein Vertrauen in die damit erzielten Ergebnisse und gezeigten Effekte.

3.6 Produktion vs. Perzeption

„*...ein Ziel, das vor allem durch das selbst Anfertigen von Modellen am Besten erreicht wurde.*“ Dieses Fragment aus dem anfangs erwähnten Zitat von Felix Klein eröffnet noch eine weitere Dimension des Einsatzes virtueller Visualisierungsräume. Studenten können selbst an der Erstellung von Visualisierungsmaterialien beteiligt werden. Analog zu den im 19ten Jahrhundert an mehreren Hochschulen üblichen Modellbauseminaren bietet es sich in unserer Zeit an, Visualisierungsseminare zu halten, bei denen Studenten selbst vor die Aufgabe gestellt werden zu bestimmten Themenkreisen didaktisch, technisch und mathematisch sinn-

volle computergestützte Visualisierungen zu erstellen. Alternativ bieten sich vergleichbare Themen auch für Abschlussarbeiten auf verschiedenem Niveau an.
Das von Studenten selbst durchgeführte Erstellen von interaktiven Visualisierungen hat dabei einen ausgesprochen ganzheitlichen Lerneffekt. Neben der mathematischen Durchdringung eines Fachgegenstandes (die oftmals das einzige Lernziel eines klassischen Seminars ist) sind für die Umsetzung in eine Visualisierung weitere Schlüsselkompetenzen notwendig:

- algorithmische Durchdringung des Sachverhaltes,
- technische Umsetzung mit einem geeignetem Medium (Autorensystem),
- didaktische Aufarbeitung des zu visualisierenden Effektes,
- Erstellung von Erklärungstexten.

All diese Punkte bewirken neben der intensiveren Auseinandersetzung mit dem Fachgegenstand häufig zusätzlich auch eine größere persönliche Identifikation mit einem bearbeiteten Thema. Persönlicher Stolz auf Erreichtes und letztlich auch eine Identifikation mit dem erstellten „Produkt“ sind oft zu beobachten.

3.7 Click vs. Touch

Beim letzten der hier behandelten Gegensatzpaare soll eine relativ moderne Entwicklung beleuchtet werden. In zunehmenden Maße finden Softwaresysteme mit Touch- oder Multitouchbedienung Einzug in die Alltagswelt. Davon ist auch der Bildungsbereich betroffen (vgl. Kortenkamp, 2012). Überraschenderweise gestaltet sich die Umstellung mausgesteuerter Programme auf Multitouchumgebungen erstaunlich schwierig. Die unterschiedlichen Eingabemedien haben verschiedene inhärente Stärken und Schwächen, denen bei der Gestaltung interaktiver Visualisierungsumgebungen Rechnung getragen werden muss. Hierbei ist ein bewusster Umgang mit dieser Problematik essentiell für die erreichbare Softwareergonomie (und somit für das didaktische Ziel). Hier sollen kurz die Stärken und Schwächen von Maus und Touch Eingabe gegenübergestellt werden, um dieses Spannungsfeld zu skizzieren.
Eine besondere Stärke einer mausgesteuerten Eingabe liegt in der sehr exakten Positionsbestimmung, die mit einer Maus möglich ist. Der direkt sichtbare Mauszeiger gibt in aller Regel vor dem Ausführen einer Aktion ein genaues visuelles Feedback, an welcher Stelle eine Aktion durchgeführt wird. Somit ist ein genaues und geplantes Handeln in einer Softwareumgebung möglich. Ebenso können bei mausgesteuerten Systemen „roll-over“-Hinweise gegeben werden, die bereits vor dem Ausführen eines Befehls visuelle Hinweise auf die zu erwartende Aktion ge-

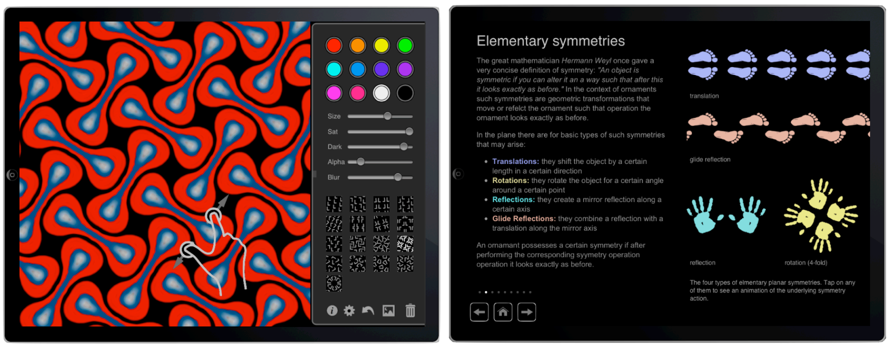

Abb. 8 Screenshots des sich im Entwicklungsstadium befindlichen Programmes *iOrnament* (für das iPad), welches interaktive Erläuterungen zum Thema der ebenen kristallographischen Gruppen bietet. Bei der Entwicklung wurde großer Wert darauf gelegt, der durch die Multitouch Haptik dominierten Bedienergonomie Rechnung zu tragen.

ben. Viele interaktive Mathematikumgebungen sind auf genau diese Eingabedingungen angewiesen (letztlich reflektiert sich die Exaktheit der Mathematik auch in einem Anspruch an exakte Positionierbarkeit z.B. geometrischer Objekte).

Diese Bedieneigenschaften stehen bei einer Bedienung mittels eines Multitouch-Bildschirms in der Regel auf geradezu erschütternde Weise nicht mehr zur Verfügung. Nicht nur die Positionierungsmöglichkeit ist auf einem Touchbildschirm (allein bedingt durch die Größe einer Fingerkuppe) geringer. Vielmehr ist der genaue Ort einer Aktion in der Regel gar nicht sichtbar, da er im Moment der Aktion durch die Fingerkuppe selbst optisch verdeckt wird. Erschwerend kommt hinzu, dass (anders als bei einer Maus) ein Touchsystem vorab keine Informationen über beabsichtige Aktionen durch Positionsinformationen bekommt. Dadurch ist ein semantisches roll-over Feedback nicht mehr möglich.

Diesen Nachteilen gegenüber steht allerdings ein nicht zu unterschätzender Vorteil: Durch das direkte Berühren der Simulation mit den Fingern entsteht ein wesentlich direkterer und in gewissen Sinne interaktiverer Zugang zum dargestellten mathematischen Objekt. Zudem ermöglicht der Einsatz von *Multi*touch auch die Einbeziehung einer komplexeren Gestensprache und nicht zuletzt auch die gleichzeitige Interaktion mehrerer Benutzer mit demselben Objekt. Auch wird dadurch der Parameterraum für Positionierungen erweitert. Während mit der Maus z.B. lediglich translatorische Information vermittelt werden kann, können durch Einsatz zweier Finger Ähnlichkeitstransformationen codiert werden. Benutzer scheinen sich daran bereits gewöhnt zu haben, denn dass Vergrößern und Verkleinern von Bildern durch zwei-Finger Gesten ist mittlerweile zur Selbstverständlichkeit geworden. In gewissem Sinne ist ein Multitouch-Modell wieder wesentlich näher an einem klassischen physischen mathematischem Modell als eine mausgetriebene Visualisierung. (Auch ein Gipsmodell einer algebraischen Fläche ist nicht in der

Lage, Tooltips zu geben und auch dort verdeckt man mit der Fingerkuppe beim Zeigen einen Teil der Oberfläche.) Somit stellt letztlich der Einsatz eines Multitouchsystems noch größere mathematische Anforderungen an die Visualisierungssoftware, damit die originäre Haptik eines quasi physischen Modells überzeugend nachgebildet werden kann.

4 Fazit

Dieser Artikel verzichtet bewusst auf Wertungen und Einordnung bestehender Systeme in die hier aufgeführten Spannungsfelder. Er möchte aber Anregungen zum bewussten Umgang mit bestehenden und selbst erstellten Visualisierungen geben. Er soll aufzeigen, dass eine Reflektion der verwendeten Methoden im Bezug auf das geplante Einsatzszenario essentiell sein kann. Er soll auch in gewissem Sinne Mut zum Einsatz offener Umgebungen machen, die dem Lernenden einen selbstgesteuerten, durch intrinsische Fragen motivierten Zugang zur Materie ermöglichen.

Vor diesem Hintergrund seien hier abschließend noch ein paar übergeordnete Designziele genannt, die bei der Erstellung der Mathe-Vital Materialien relevant sind. Diese sind alle idealtypisch zu verstehen und werden in einzelnen Situation nur mehr oder weniger erreicht.

- *Beziehungsreichtum:* Idealerweise ist eine Visualisierungssequenz in unterschiedlichen Lehrkontexten einsetzbar. So kann beispielsweise eine Visualisierung von Vektorfeldern sowohl in Vorlesungen über Differentialgleichungen als auch in Linearer Algebra als auch in Analysis als auch in Numerik eine Rolle spielen.
- *Ästhetische Gestaltung:* Neben aller Funktionalität sollten Materialien ansprechend und einladend gestaltet sein. Idealerweise weckt das reine Erscheinungsbild schon das Interesse an einer Interaktion.
- *Interessante Effekte:* Die dargestellten Effekte sollten einen gewissen intellektuellen Reiz haben. All zu offensichtliche Visualisierungen erlangen schnell den Status überflüssigen Beiwerks. Wenn sich ein Effekt nicht sofort erschließt, sollte die Visualisierung an diesen heranführen.
- *Mathematikkommunikation:* Mathematik hat nicht selten den Status eines vergleichsweise „abschreckenden“ Faches. Interessant und ästhetisch gestaltete Visualisierung können als Botschafter für den Facettenreichtum des Faches dienen.

Gerade im Hinblick auf den letzen erwähnten Punkt soll hier nochmals betont werden, dass sich der Einsatz simulationsgetriebener interaktiver Visualisierungen keinesfalls auf die universitäre Lehre beschränkt. Einige der im Umfeld von Mathe-Vital erstellten Visualisierungen werden mittlerweile mit großem Erfolg im Mathematikbereich des Deutschen Museums in München und im Mineralienmuseum Oberwolfach eingesetzt. Es wurden weiterhin auch Visualisierungen zu Themen erstellt, die von breiterem öffentlichen Interesse sind. So wurden beispielsweise im Jahr 2008 anlässlich des deutschlandweiten Jahres der Mathematik Kurse zu Themen wie „Musik und Mathematik“ und „Mathematik und Pflanzenwachstum“ angeboten, die durch Mathe-Vital Visualisierungen bereichert wurden. Die Erfahrung zeigt, dass Visualisierungsmaterialen, die einen breiten Spielraum für experimentelle Erfahrungen lassen, nicht zuletzt auch mannigfaltige Gesprächsanlässe über Mathematik mit nicht-Mathematikern liefern.

Literatur

Klein, F. (1928), Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, Springer, Heidelberg.

Kortenkamp, U. (2012). Interaktives Whiteboard, iPad & Co. – das Klassenzimmer der Zukunft. Techn. Report, PH Karlsruhe.

Kortenkamp, U., Richter-Gebert, J. (2002). Complexity issues in dynamic geometry, In Festschrift in the honor of Stephen Smale’s 70th birthday, M. Rojas, F. Cucker (eds.), World Scientific, pp 355–404.

Kortenkamp, U., Richter-Gebert, J. (2001). Grundlagen Dynamischer Geometrie. In Zeichnung—Figur—Zugfigur Mathematische und didaktische Aspekte Dynamischer Geometrie-Software H.-J. Elschenbroich, Th. Gawlick, H.-W. Henn (ed.), Verlag Franzbecker, pp 123–145.

Kortenkamp, U., Richter-Gebert, J., (2010), The power of scripting: DGS meets programming. *Acta Didactica Napocensia, 3(2)*, 67–78.

Laborde, Colette & Rudolf Sträßer (2010): Place and use of new technology in the teaching of mathematics: ICMI activities in the past 25 years. ZDM, 42, 121–133.

Richter-Gebert, J., Kortenkamp, U. (2006). *Cinderella.2*. `www.cinderella.de`.

Richter-Gebert, J., Kortenkamp, U. (2012). The Cinderella.2 Manual: Working with The Interactive Geometry Software, Springer, Heidelberg.

Richter-Gebert, J. et. al. (seit 2007). *Mathe-Vital*. `www.mathe-vital.de`.

Schulmeister, R. (2005). Lernplattformen für das virtuelle Lernen. München: Oldenbourg.

Strzebkoski, R. und Kleeberg, N. (2002). Interaktivität und Präsentation als Komponenten multimedialer Lernanwendungen. In L. J. Issing und P. Klimsa (Hrsg.), Information und Lernen mit Multimedia–Lehrbuch für Studium und Praxis (3. Aufl.)., S. 229–245. Weinheim: Verlagsgruppe Beltz, Psychologische Verlags Union.

Weigand, H.-G. und Weth, T. (2002). Computer im Mathematikunterricht. Neue Wege zu alten Zielen. Heidelberg, Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.